CALCOLO INTEGRALE

Calcolo Integrale

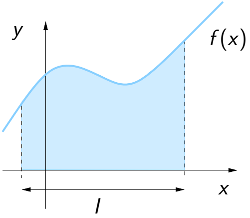
Dato un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, si affrontano due tipi di problematiche:

1. Integrazione indefinita.

Data $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si vuole calcolare una funzione $F(x) : \; F'(x) = f(x)$, ovvero si vuole compiere l'operazione inversa della derivazione

2. Integrazione definita.

Data $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si vuole calcolare l'area della regione di piano compresa tra il grafico della funzione $f(x)$ e l'asse delle ascisse per $x \in I$, come indicato in figura



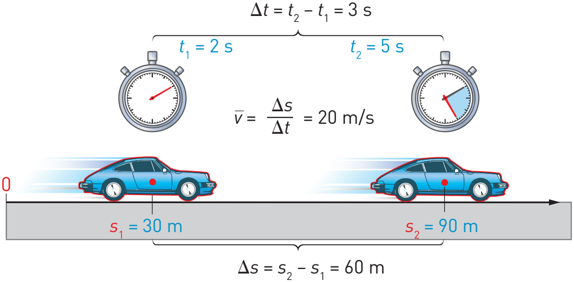
Problema

Determinare lo **spostamento** di un'auto rispetto alla posizione che essa assume ad un istante iniziale $t_0 = 0$, al variare del tempo $t > t_0$, sapendo che essa si muove in città con una **velocità istantanea** (dipendente dal tempo t) pari a

$$v(t) = 30 \sin^2(t) \quad \text{km/h}.$$

Velocità media

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$ è la velocità media



La velocità istantanea è

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t).$$

Nota la derivata di una funzione, voglio risalire alla funzione:

$$\begin{array}{ll} \text{Dato:} & s'(t) = v(t), \\ \text{incognita:} & s(t). \end{array}$$

Questo tipo di problame è detto:

problema di integrazione indefinita, o

calcolo di una primitiva di una funzione data.

Integrazione indefinita

Definizione di primitiva.
Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Ogni funzione F derivabile in I e t.c.

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I$$

è detta primitiva di f in I.

Def. Una funzione f che ammette una primitiva è detta integrabile in senso indefinito.

Esempio. $f(x) = \cos(x)$, $I = \mathbb{R}$.
La funzione $F(x) = \sin(x)$ è una primitiva di f in $\mathbb{R}$, in quanto $F'(x) = D(\sin(x)) = \cos(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Oss. Anche la funzione $G(x) = \sin(x) + 5$ è una primitiva di f in $\mathbb{R}$.

Una qualsiasi funzione del tipo $F(x) = \sin(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$ è una primitiva di $f(x) = \cos(x)$.

Teorema. Due primitive $F(x)$ e $G(x)$ della stessa funzione $f(x)$ sull'intervallo I possono differire solo per una costante, ovvero

$$G(x) - F(x) = c, \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Dim. Sia $H(x) = G(x) - F(x)$. Se F e G sono due primitive, per definizione sono derivabili e lo è anche la loro differenza, quindi H è derivabile e $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Per il *Teorema della derivata nulla* allora $H(x)$ è costante su I, ovvero $H(x) = G(x) - F(x) = c$.

Corollario. Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile in senso indefinito su I, sia $F(x)$ una sua primitiva.
Allora tutte le primitive di f su I sono del tipo

$$\boxed{F(x) + c, \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}}$$

Def. Indichiamo con $\int f(x)dx$ l'insieme di tutte le primitive di f in I, ovvero

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c,\ c \in \mathbb{R},\ F \text{ una primitiva di } f\}.$$

$\int f(x)dx$ è detto integrale indefinito di f in dx.

Il calcolo della primitiva F di una funzione f data è un esempio di **PROBLEMA INVERSO**, precisamente è il **problema inverso della derivazione**

e l'integrale della derivata di una funzione $F(x)$ ridà la funzione stessa (più una costante generica):

$$\int F'(x)dx = F(x) + c$$

Esempio 1. $\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$ (perchè $D(\sin(x)) = \cos(x)$)

Esempio 2. $\int dx = \int 1 dx = x + c$

Esempio 3. $\int x dx = ?$

$f(x) = x$, cerco $F(x) : F'(x) = x$. Ricordo che $D(x^2) = 2x$, allora $x = \frac{1}{2}D(x^2) = D(\frac{1}{2}x^2)$. Ovvero $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ e $\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + c$

Esempio 4. $\int x^2 dx = ?$

$f(x) = x^2$, cerco $F(x) : F'(x) = x^2$.
Ricordo che $D(x^3) = 3x^2$, allora $x^2 = \frac{1}{3}D(x^3) = D(\frac{1}{3}x^3)$.
Ovvero $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ e $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Esempio 5. $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = ?$

$f(x) = \frac{1}{x}$, cerco $F(x) : F'(x) = \frac{1}{x}$.
Ricordo che $D(\log(x)) = \frac{1}{x}$ per $x > 0$ e $D(\log(-x)) = \frac{1}{x}$ per $x < 0$, allora

$$\boxed{\int \frac{1}{x} dx = \log(|x|) + c, \qquad \text{per } x > 0 \text{ e } x < 0}$$

Ricordando le derivate delle funzioni elementari abbiamo:

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c \qquad \int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c$$

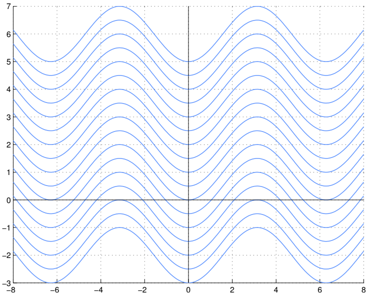
Esercizio 1. Calcolare la primitiva di $f(x) = \sin(x)$ che vale 5 in $x_0 = \pi$.

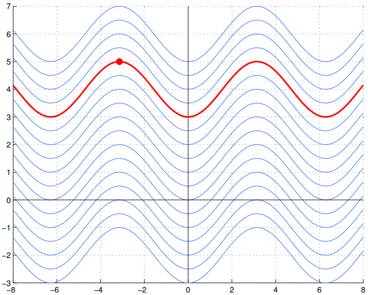
Sappiamo che $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$. Tra tutte le primitive, cerco quella che vale 5 in $x_0 = \pi$, ovvero $-\cos(\pi) + c = 5$.

Ottengo una equazione in cui l'incognita è c e la ricavo:

$$c = 5 + \cos(\pi) = 5 - 1 = 4.$$

La primitiva cercata è allora $F(x) = -\cos(x) + 4$.





Proprietà di linearità dell'integrale

Teorema

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni integrabili (in senso indefinito) su I. Allora, $\forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, anche la funzione $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ è integrabile e si ha:

$$\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

Esempio. Calcolare $\int(4x^3 + 2x^2 - \frac{5}{1+x^2})dx$.

$$\begin{aligned}\int(4x^3 + 2x^2 - \frac{5}{1+x^2})dx &= 4\int x^3 dx + 2\int x^2 dx - 5\int \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= 4\frac{1}{4}x^4 + c_1 + 2\frac{1}{3}x^3 + c_2 - 5\arctan(x) + c_3 \\ &= x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 5\arctan(x) + c\end{aligned}$$

Oss. Si mette una sola costante per tutti gli integrali: $c = c_1 + c_2 + c_3$.

Regola di integrazione per parti

Teorema. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili su I. Se $f'(x)g(x)$ è integrabile su I, allora lo è anche $f(x)g'(x)$ e

$$\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx}$$

Esempio. Calcolare $\displaystyle\int \log(x)dx$.

Riscrivo $\displaystyle\int \log(x)dx = \int 1 \cdot \log(x)dx$,

$$f'(x) = 1, \quad g(x) = \log(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = x, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

Applicando la regola di integrazione per parti, si ha:

$$\int 1 \cdot \log(x)dx = x\log(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\log(x) - x + c$$

Quindi $$\boxed{\int \log(x)dx = x\log(x) - x + c}$$

Esempio. Calcolare $\displaystyle\int \sin^2(x)dx$.

Abbiamo: $\displaystyle\int \sin^2(x)dx = \int \sin(x)\cdot\sin(x)dx$.

$f'(x) = \sin(x)$, $g(x) = \sin(x)$ $\Rightarrow$ $f(x) = -\cos(x)$, $g'(x) = \cos(x)$

Applicando la formula di integrazione per parti abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(x)dx &= \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \\
&= -\cos(x)\sin(x) + \int \cos^2(x)dx \\
&= -\cos(x)\sin(x) + \int (1-\sin^2(x))dx \\
&= -\cos(x)\sin(x) + x + c - \int \sin^2(x)dx
\end{aligned}$$

Da cui: $\displaystyle 2\int \sin^2(x)dx = -\cos(x)\sin(x) + x + c$

ovvero:

$$\int \sin^2(x)dx = \frac{1}{2}(x - \cos(x)\sin(x)) + c$$

In maniera analoga si ha

$$\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}(x + \cos(x)\sin(x)) + c$$

Notazione di derivazione secondo Leibniz

Per denotare l'operazione di derivata, Leibniz usava la notazione $\dfrac{d}{dx}$.

Data $y = f(x)$, si ha $\quad f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{dy}{dx}$

La notazione di Leibniz si presta ad essere interpretata come una frazione, quindi dal primo e dall'ultimo termine dell'uguaglianza scritta sopra si ha:

$$dy = f'(x)dx$$

Regola di integrazione per sostituzione

Teorema. Siano I e J due intervalli in $\mathbb{R}$.
Sia $\varphi : I \to J$ una funzione derivabile.
Sia $f : J \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile.
Sia F una primitiva di f sull'intervallo J.
Allora la funzione $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ è integrabile sull'intervallo I e si ha:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + c$$

Interpretazione:
Posto $y = \varphi(x)$, si ha $dy = \varphi'(x)dx$ e

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(y)dy = F(y) + c = F(\varphi(x)) + c$$

Esempio. Calcolare $\int 2xe^{x^2}dx$.

Dobbiamo individuare una funzione $\varphi(x)$ e la sua derivata $\varphi'(x)$ per poter scrivere l'integrale come $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$.

Poniamo:

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x) = x^2, \qquad \text{da cui } \frac{dy}{dx} = \varphi'(x) = 2x, \\ dy &= \varphi'(x)dx = 2xdx. \end{aligned}$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned} \int 2xe^{x^2}dx &= \int \underbrace{e^{x^2}}_{e^y}\underbrace{2xdx}_{dy} \\ &= \int e^y dy = e^y + c = e^{x^2} + c. \end{aligned}$$

Esempio. Calcolare $\int \tan(x)dx$.

Anzitutto osserviamo che

$$\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = \int \frac{1}{\cos(x)}\sin(x)dx.$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x) = \cos(x), \qquad \text{da cui } \frac{dy}{dx} = \varphi'(x) = -sin(x), \\ dy &= \varphi'(x)dx = -sin(x)dx. \end{aligned}$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos(x)}\sin(x)dx &= -\int \underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{1/y} \underbrace{(-\sin(x))dx}_{dy} \\ &= -\int \frac{1}{y}dy = -\log|y| + c = -\log|\cos(x)| + c. \end{aligned}$$

Riferimenti bibliografici:
Canuto-Tabacco (ed. Springer), cap. 9.1 e 9.2.
Canuto-Tabacco (ed. Pearson), cap. 10.1 e 10.2.

Esercizi:
n. 1 - 12 del capitolo del libro.