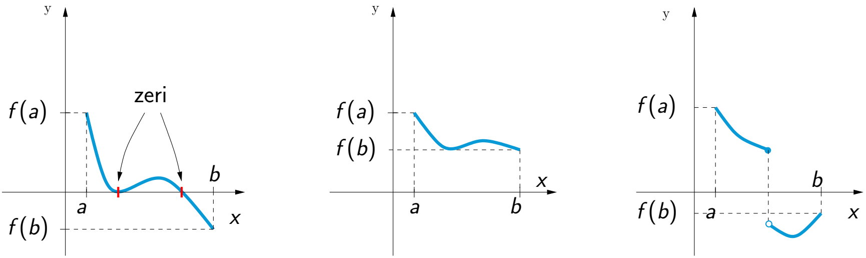
Proprietà delle funzioni continue

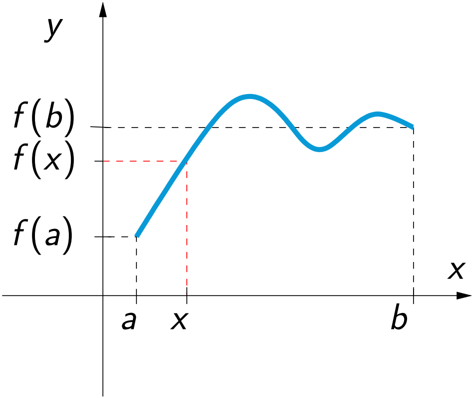
Def. Data una funzione reale f, si chiama **zero** (o radice) di f ogni punto $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ in cui f si annulla.

Teorema (degli zeri di una funzione continua).
Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste almeno uno zero di f nell'intervallo aperto (a, b).

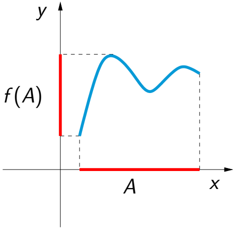


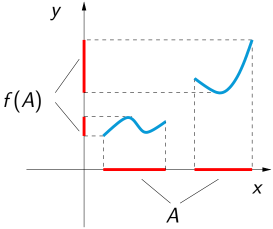
Ip. SI, Tesi. SI   Ip. NO, Tesi. NO   Ip. NO, Tesi. NO

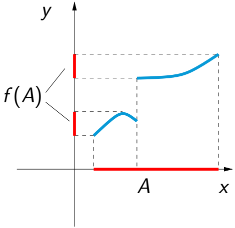
Teorema (dei valori intermedi) Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.



L'immagine di un insieme $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$ tramite f è:
$f(A) = \{y = f(x): \ x \in A\}$
Corollario. Sia f una funzione continua su un intervallo A. Allora l'immagine $f(A)$ dell'intervallo A tramite f è ancora un intervallo.







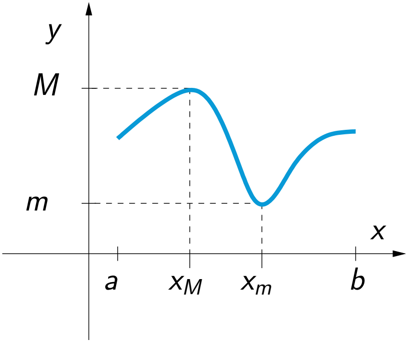
A intervallo	A non intervallo	A intervallo
f continua su A	f continua su A	f discontinua su A
Ip. SI, Tesi. SI	Ip. NO, Tesi. NO	Ip. NO, Tesi. NO

Massimo e minimo di una funzione

Def. Si chiamano massimo e minimo di una funzione f su un intervallo $[a, b]$ i numeri reali

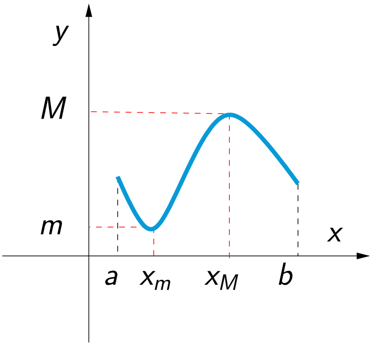
$$M = \max\{f(x) : \ a \leq x \leq b\} = \max_{x \in [a,b]} f(x) \text{ e}$$

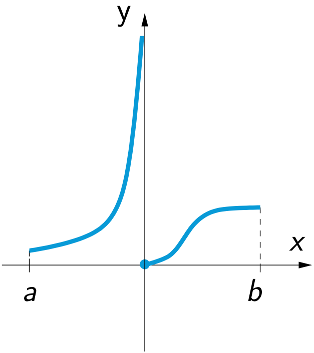
$$m = \min\{f(x) : \ a \leq x \leq b\} = \min_{x \in [a,b]} f(x).$$



x_M e x_m sono detti rispettivamente punto di massimo e punto di minimo.

Teorema (di Weierstrass).
Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora f è limitata ed ivi assume valori massimo e minimo.



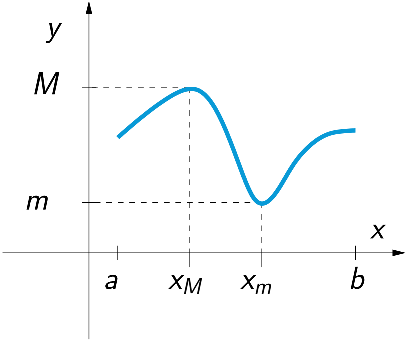


f continua: $\exists m,\ M$

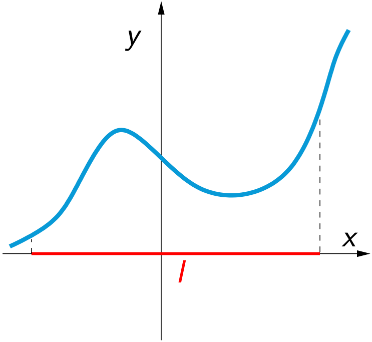
f discontinua: $\exists m,\ \nexists M$

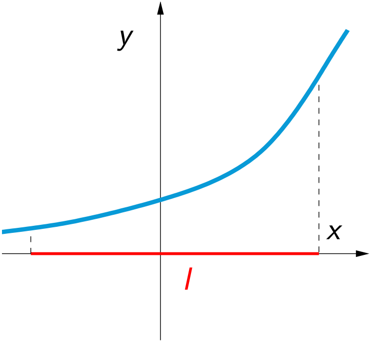
Il seguente teorema è una conseguenza del teorema di Weierstrass e del teorema dei valori intermedi.

Torema Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora f assume tutti i valori compresi tra $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$.



Teorema. Sia f una funzione continua su un intervallo I. Allora f è iniettiva se e solo se è strettamente monotona su I.





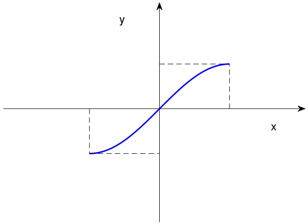
f continua sull'intervallo I: NON monotona e NON iniettiva su I.

f continua sull'intervallo I: iniettiva e monotona su I

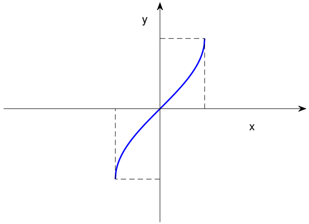
L'equivalenza cade se f non è continua o se I non è un intervallo.

Teorema. Sia f una funzione continua e invertibile su un intervallo I. Allora la funzione inversa f^{-1} è continua sull'intervallo $J = f(I)$.

Es. $f(x) = \sin(x)$ con $I = [-\pi/2, \pi/2]$.
f è continua strettamente monotona sull'intervallo I e $J = f(I) = \{y = \sin(x),\ x \in [-\pi/2, \pi/2]\} = [-1, 1]$ è un intervallo.
Allora $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ è continua su J.



$y = f(x) = \sin(x)$



$y = f^{-1}(x) = \arcsin(x)$

N.B. $\sin(x)$ non è invertibile sul suo dominio (perché non è strettamente monotona su tutto $\mathbb{R}$).