Asintoti di funzione

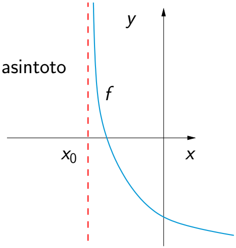
Gli asintoti di una funzione sono rette, quindi:

1. rette verticali $\longrightarrow$ asintoti verticali
2. rette orizzontali $\longrightarrow$ asintoti orizzontali
3. rette oblique $\longrightarrow$ asintoti obliqui

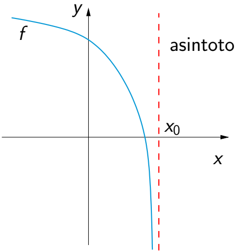
Asintoti verticali destri e sinistri

Sia x_0 punto di accumulazione per $\mathrm{dom}(f)$.

La retta $x = x_0$ è asintoto verticale destro per f se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ $(+\infty \text{ o } -\infty)$

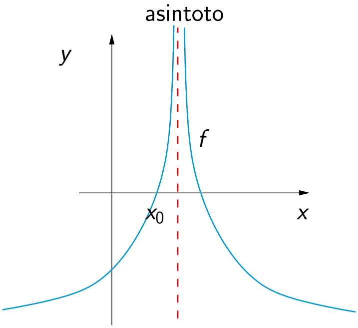


La retta $x = x_0$ è asintoto verticale sinistro per f se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ $(+\infty \text{ o } -\infty)$



Asintoto verticale completo

Oss.1 Se $x = x_0$ è sia asintoto verticale destro che asintoto verticale sinistro, si dice che è asintoto verticale (completo).
Oss.2 Gli asintoti verticali vanno cercati agli estremi (finiti) del dominio della funzione, oppure nei punti in cui una funzione definita a tratti cambia definizione.



Asintoti orizzontali e obliqui destri

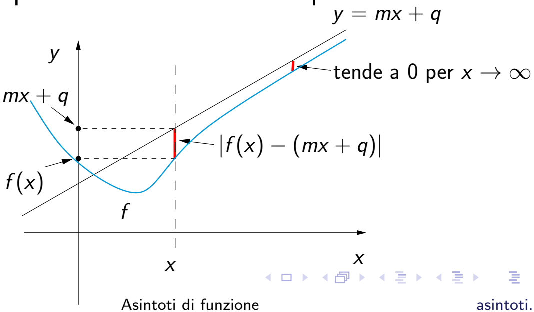
Sia $+\infty$ punto di accumulazione per dom(f), cioè f sia definita in un intorno di $+\infty$.

La retta $y = mx + q$ è un asintoto destro della funzione f se esistono m e $q \in \mathbb{R}$ (ovvero valori reali finiti) tali che

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

Se $m = 0$ l'asintoto è orizzontale, se $m \neq 0$ l'asintoto è obliquo.

Per $x \to +\infty$, la f si comporta come la retta di equazione $y = mx + q$:

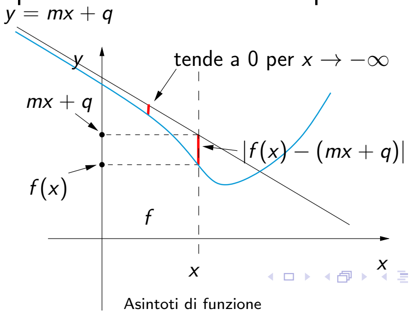


Asintoti orizzontali e obliqui sinistri

Sia $-\infty$ punto di accumulazione per dom(f), cioè f sia definita in un intorno di $-\infty$.
La retta $y = mx + q$ è un asintoto sinistro della funzione f se esistono m e $q \in \mathbb{R}$ (ovvero valori reali finiti) tali che

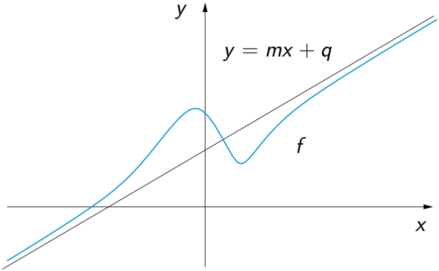
$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

Se $m = 0$ l'asintoto è orizzontale, se $m \neq 0$ l'asintoto è obliquo.
Per $x \to -\infty$, la f si comporta come la retta di equazione $y = mx + q$:



Asintoti orizzontali e obliqui completi

Se una retta è un asintoto sia destro che sinistro per f, allora si dice che è asintoto completo per f.



Calcolo di m e q per asintoti orizz. e obl.

Consideriamo il caso di ricerca di un asintoto destro e partiamo dalla definizione:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(mx+q)]=0.$$

Si ha:

$$0=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(mx+q)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-(mx+q)}{x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{mx}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{q}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-m.$$

Quindi $\qquad m=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}.$

Dalla definizione di asintoto: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(mx+q)]=0 \qquad \Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}q=q$$

Es. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Cerco asintoto destro: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1,$

$$q = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0.$$

Ho un asintoto obliquo destro $y = x$.

Cerco asintoto sinistro:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+1/x^2}}{x} = -1,$$

$$q = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} + x =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x)}{\sqrt{x^2+1} - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} - x} = 0.$$

Ho un asintoto obliquo sinistro $y = -x$.

OSSERVAZIONE: Se $m = \infty$ e/o $q = \infty$ non si ha asintoto.

Es. $f(x) = \log(x)$.
Qui si può cercare solo asintoto destro perchè $\mathrm{dom} f = (0, +\infty)$.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0 \qquad \Rightarrow m = 0$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty.$$

Quindi $f(x) = \log(x)$ non ammette asintoti orizzontali o obliqui.

Si ha un asintoto verticale destro: $x = 0$.
Destro perchè $\lim_{x \to 0^+} \log(x) = -\infty$.

Riferimenti bibliografici:

Canuto-Tabacco (ed Springer): Cap. 5.3
Canuto-Tabacco (ed Pearson): Cap. 6.4