ESERCIZI SUI NUMERI COMPLESSI TRATTI DA TEMI D'ESAME

a cura di Michele Scaglia

FORMA CARTESIANA (O ALGEBRICA) DI UN NUMERO COMPLESSO

Dalla teoria sappiamo che un numero complesso z può essere pensato come una coppia ordinata (x, y) di numeri reali x e y.
L'insieme dei numeri complessi viene indicato con $\mathbb{C}$ e può essere identificato con il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Infatti ad ogni numero complesso z è associato uno ed un solo punto $P(x, y)$ del piano cartesiano.

A seconda della problematica che ci si trova, volta per volta, a dover risolvere, è conveniente disporre di diverse forme tra loro equivalenti per poter rappresentare un medesimo numero complesso $z \in \mathbb{C}$.
Noi vedremo la **forma cartesiana** (o algebrica) e la **forma esponenziale** dei numeri complessi.

In questa prima sezione introdurremo la forma cartesiana.

Dato un numero complesso $z = (x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, la **forma cartesiana** di z è la seguente:

$$\boldsymbol{z = x + iy},$$

ove

- i è l'unità immaginaria ed è tale che $i^2 = -1$,
- x ed y vengono dette rispettivamente ***parte reale*** e ***parte immaginaria*** del numero complesso z e scriveremo

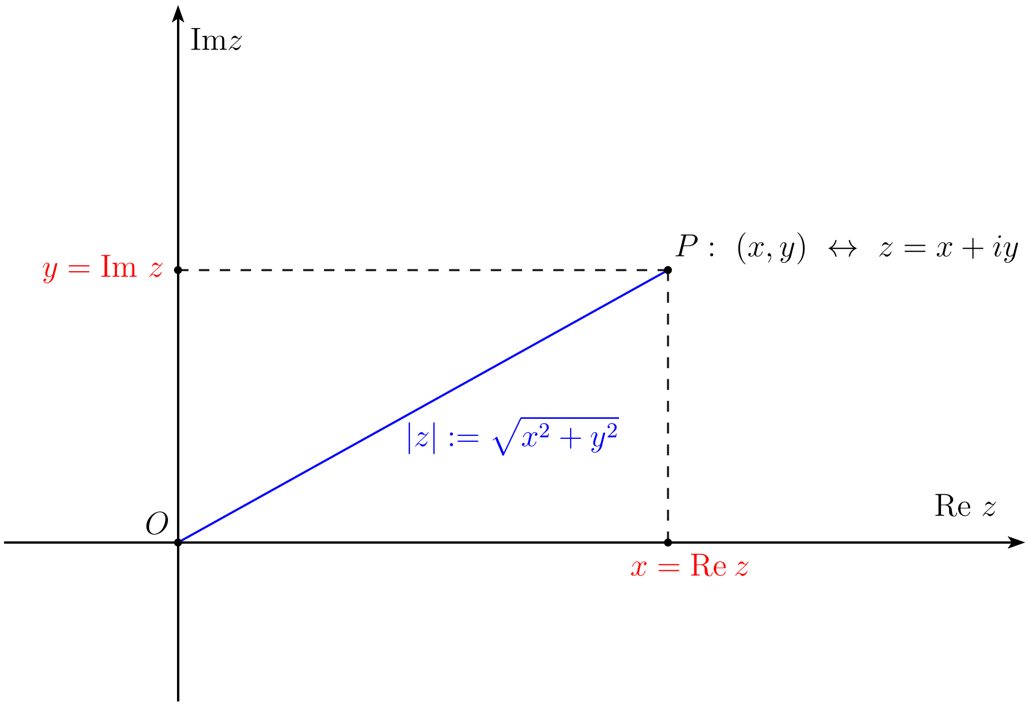
  $$x = \mathrm{Re}z, \qquad y = \mathrm{Im}z.$$

  Pertanto si può pure scrivere

  $$z = \mathrm{Re}z + i\mathrm{Im}z.$$

  Osserviamo che sia **parte reale** (x), sia **parte immaginaria** (y) sono dei **numeri reali**. Rappresentano le coordinate reali dell'unico punto $P(x, y)$ del piano cartesiano associato al numero complesso $z = x + iy$. È la presenza dell'unità immaginaria i che rende il numero z complesso.

Visualizziamo nell'immagine che segue quanto abbiamo appena richiamato.



Definiamo **coniugato** di un numero complesso $z = x + iy$ il numero complesso

$$\bar{z} = x - iy,$$

vale a dire il numero complesso che ha stessa parte reale di z e parte immaginaria opposta. Ciò significa che il punto P' rappresentativo di $\bar{z}$ nel piano cartesiano sia il simmetrico rispetto all'asse delle ascisse del punto P (associato a z): infatti, a $z = x + iy$ è associato il punto $P(x, y)$, mentre a $\bar{z} = x - iy$ è associato il punto $P'(x, -y)$.
Assegnato il numero complesso $z = x + iy$, definiamo **modulo** di z la quantità

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\text{Re}z)^2 + (\text{Im}z)^2},$$

che, per il Teorema di Pitagora, rappresenta la distanza del punto $P(x, y)$ rappresentativo di z dall'origine degli assi $O(0, 0)$ (che rappresenta il numero complesso $z = 0 = 0 + i0$.)

Noi faremo largo impiego della forma cartesiana di un numero complesso per risolvere quegli esercizi nei quali viene richiesta, a partire da opportune equazioni, la ricerca di certi luoghi geometrici. Spiegheremo negli esempi che seguono il significato del termine *luogo geometrico*.

LUOGHI GEOMETRICI

1) **[T.E. 03/07/2008]**

Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$|z - 7|^2 + |z + 7|^2 = 2(z - 7)^2.$$

Svolgimento.

Vista la forma dell'equazione (nella quale compaiono moduli e non), conviene ricorrere alla rappresentazione algebrica (o cartesiana) del numero complesso z nel seguente modo:

$$z = x + iy, \ \ x, y \in \mathbb{R},$$

essendo

$$x = \mathrm{Re}z, \quad y = \mathrm{Im}z$$

Sappiamo già cosa si intenda per "luogo geometrico degli z" : si intende l'insieme dei punti $P(x, y)$ del piano cartesiano che rappresentano le soluzioni $z = x + iy$ dell'equazione assegnata e che appartengono ad un'opportuna configurazione geometrica nel piano cartesiano, detta, per l'appunto, luogo geometrico.

Torniamo al nostro esercizio.
Sostituendo $z = x + iy$ otteniamo:

$$|x + iy - 7|^2 + |x + iy + 7|^2 = 2\left(x + iy - 7\right)^2,$$

ossia, raccogliendo parti reali e parti immaginarie,

$$|(x - 7) + iy|^2 + |(x + 7) + iy|^2 = 2(x^2 + i^2y^2 + 49 + 2ixy - 14x - 14iy)$$

Ricordiamo che

- $i^2 = -1$;
- dato $z = a + ib$, definiamo il modulo di z come

  $$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2},$$

  ossia la distanza del punto P rappresentativo di z nel piano complesso dall'origine del riferimento.
  In particolare, si ha

  $$|z|^2 = (\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2 = a^2 + b^2.$$

Nel nostro caso si ha

$$|(x - 7) + iy|^2 = (x - 7)^2 + y^2 = x^2 + 49 - 14x + y^2$$

e

$$|(x + 7) + iy|^2 = (x + 7)^2 + y^2 = x^2 + 49 + 14x + y^2.$$

Quindi, tornando all'equazione, otteniamo

$$x^2 + 49 - 14x + y^2 + x^2 + 49 + 14x + y^2 = 2(x^2 - y^2 + 49 + 2ixy - 14x - 14iy),$$

cioè

$$4y^2 + 28x - 4ixy + 28iy = 0,$$

che equivale a

$$y^2 + 7x + i(-xy + 7y) = 0 = 0 + i0.$$

Affinché il membro di sinistra dell'equazione (che è un numero complesso, di parte reale y^2+7x e parte immaginaria $-xy+7y$) sia uguale a 0, o, meglio, $0+i0$, si dovrà avere necessariamente

$$\begin{cases} y^2 + 7x = 0 \\ -xy + 7y = 0 \end{cases}.$$

Il precedente sistema equivale all'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} y^2 + 7x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \cup \qquad \begin{cases} y^2 + 7x = 0 \\ -x + 7 = 0 \end{cases}.$$

Risolvendo il primo otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

ossia il numero complesso

$$z = 0 + i0 = 0,$$

che, nel piano cartesiano, corrisponde al punto $(0, 0)$.

Il secondo sistema, invece, equivale a

$$\begin{cases} y^2 + 49 = 0 \\ x - 7 = 0 \end{cases}.$$

La prima equazione, ossia $y^2 = -49$, è evidentemente impossibile (non dimentichiamoci del fatto che y è un numero reale; è z un numero complesso).
Quindi il secondo sistema non fornisce alcuna soluzione all'equazione di partenza.
In definitiva, il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ che risolvono l'equazione assegnata è costituito da un solo punto, ossia $(0, 0)$.

2) Si trovino le soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} |z - 1 - i| = 1 \\ \mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z = 2 \end{cases}.$$

Svolgimento.

Diamo due modi di svolgimento.

1° modo.

Procediamo come al solito ponendo $z = x + iy$.

Sostituendo otteniamo il sistema

$$\begin{cases} |x - 1 + i(y-1)| = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}.$$

Calcoliamo quindi il modulo del numero complesso $w = x - 1 + i(y-1)$. Si ha

$$|x - 1 + i(y-1)| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2}.$$

Tornando al sistema si ottiene

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2} = 1 \\ x + y = 2 \end{cases},$$

che, risolto (elevando al quadrato i due membri della prima equazione), dà le due soluzioni

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

da cui le due soluzioni complesse

$$z_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{2+\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} + i\frac{2-\sqrt{2}}{2},$$

che corrispondono a due punti del piano cartesiano, aventi coordinate $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$ rispettivamente.

2° modo.

Cerchiamo di interpretare geometricamente la questione.

Innanzitutto, ricordiamo che, assegnati due numeri complessi $z = a + ib$ e $w = c + id$, il modulo

$$|z - w|$$

rappresenta, nel piano cartesiano, la distanza tra i due punti $A(a, b)$ e $B(c, d)$, associati rispettivamente ai due numeri complessi z e w.

Pertanto, la prima equazione
$$|z-1-i|=1,$$
che conviene riscrivere come
$$|z-(1+i)|=1,$$
è risolta da tutti e soli gli $z=x+iy$ che corrispondono ai punti $P(x,y)$ del piano cartesiano che hanno distanza uguale a 1 dal punto di coordinate $(1,1)$ (associato al numero complesso $w=1+i$).
Si tratta pertanto degli infiniti punti della circonferenza di centro $(1,1)$ e raggio 1.
Quindi la prima equazione del sistema è soddisfatta da infiniti numeri complessi z, quei numeri che, geometricamente parlando, costituiscono i punti di una circonferenza.
La seconda equazione, $\text{Re}z+\text{Im}z=2$, pensando a $z=x+iy$, diviene
$$x+y=2,$$
che è l'equazione di una retta nel piano cartesiano (stiamo cioè affermando che gli $z=x+iy$ che risolvono la seconda equazione sono tutti e soli quelli che risultano rappresentati nel piano cartesiano dai punti $P(x,y)$ appartenenti alla retta di equazione $x+y=2$).

In definitiva, il sistema assegnato, si traduce nel trovare i punti di intersezione tra la circonferenza di centro $(1,1)$ e raggio 1 e la retta $x+y=2$.

Essendo noti centro e raggio, l'equazione della circonferenza è subito trovata. Si ha infatti
$$\mathcal{C}: \ (x-1)^2+(y-1)^2=1,$$
che diviene
$$\mathcal{C}: \ x^2+y^2-2x-2y+1=0.$$

Dall'intersezione di tale circonferenza con la retta $x+y=2$ si ritrovano gli stessi punti ottenuti col primo modo.

3) **[T.E. 09/01/2007]**

Determinare il luogo geometrico degli $z\in\mathbb{C}$ tali che
$$\text{Re}\left[7z-8\overline{z}-3\text{Im}z+z^2+z\overline{z}\right]=0.$$

Svolgimento.

Dobbiamo trovare cioè gli $z=x+iy$ che, sostituiti nell'espressione, rendono nulla la parte reale del numero complesso $A+iB$ risultante in parentesi quadra.

Sostituendo $z=x+iy$ si giunge, dopo qualche semplice calcolo, all'equazione
$$\text{Re}\left[2x^2-x-3y+i(15y+2xy)\right]=0.$$

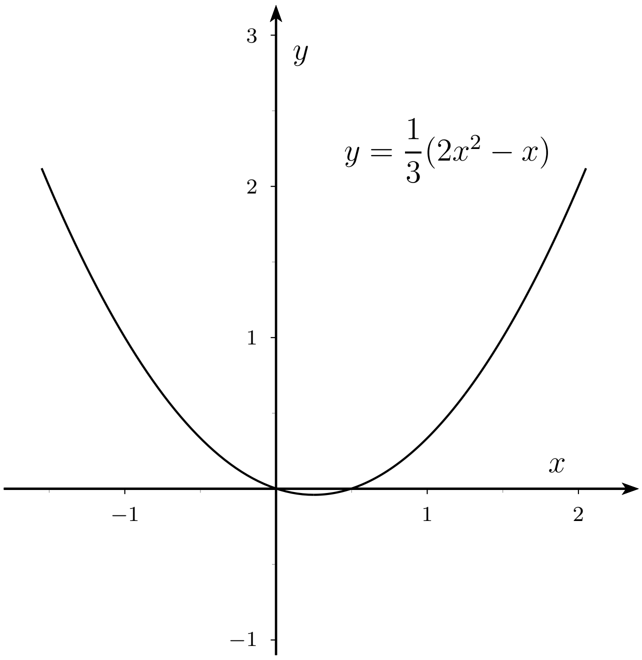
In parentesi quadra vi è, come si diceva, un numero complesso $A + iB$ di parte reale $A = 2x^2 - x - 3y$ e parte immaginaria $B = 15y + 2xy$.
Seguendo la consegna dell'esercizio, poniamo la parte reale uguale a zero:

$$2x^2 - x - 3y = 0.$$

Gli $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ che stiamo cercando corrispondono quindi ai punti $P(x, y)$ del piano cartesiano le cui coordinate soddisfano la precedente equazione che, riscritta come

$$y = \frac{1}{3}(2x^2 - x),$$

è meglio riconoscibile come equazione di una parabola ad asse di simmetria parallelo all'asse y. Tale parabola è il luogo cercato:



4) **[T.E. 29/06/2009]**

Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$|z - (3 + i)| \leq 2 \quad \text{e} \quad \mathrm{Re}(z^2 + 7i) - (\mathrm{Re} z)^2 = 0.$$

Svolgimento.

La presenza della "**e**" sta a indicare che dobbiamo trovare gli $z = x + iy$ che soddisfano **contemporaneamente** ad entrambe le richieste.

Cominciamo con la prima.
Tale disequazione è soddisfatta da quei numeri complessi $z = x + iy$ che, nel piano cartesiano,

sono rappresentati da quei punti $P(x, y)$ che distano dal punto $(3, 1)$ di una quantità minore o uguale a 2.
Ossia tutti e soli i punti del **cerchio chiuso** di centro $(3, 1)$ e raggio 2 (attenzione, non è la circonferenza, bensì il cerchio, vale a dire la parte interna unita al bordo).
La seconda equazione, invece, la trattiamo con la sostituzione $z = x + iy$.

Si ha

$$\text{Re}\left[(x + iy)^2 + 7i\right] - (x)^2 = 0,$$

da cui

$$\text{Re}\left[x^2 - y^2 + 2ixy + 7i\right] - (x)^2 = 0,$$

Si ottiene immediatamente

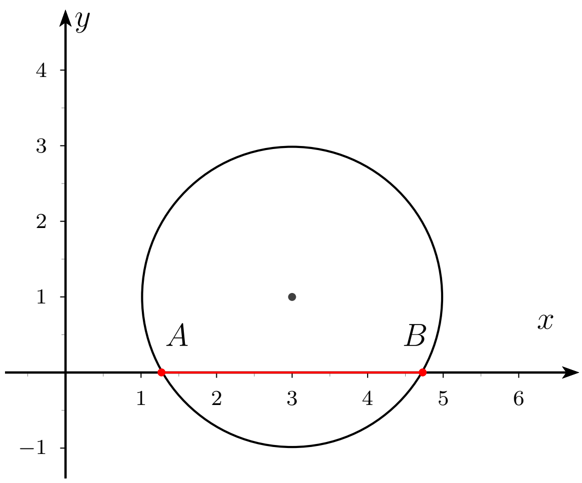
$$y^2 = 0, \quad \text{che equivale a } y = 0.$$

Tale equazione, nel piano cartesiano, rappresenta l'insieme dei punti $P(x, y)$ che appartengono all'asse x.

Il problema iniziale è soddisfatto dai punti comuni al cerchio di centro $(3, 1)$ e raggio 2 e l'asse x, ossia i punti di un segmento.
Per trovare gli estremi di tale segmento bisogna calcolare le intersezioni tra l'asse x e la circonferenza di centro $(3, 1)$ e raggio 2. La circonferenza, essendo noti centro e raggio, ha equazione

$$C: \ (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

Intersecando tale circonferenza con la retta $y = 0$ (vale a dire l'asse x) si trovano i punti $A(3 - \sqrt{3}, 0)$ e $B(3 + \sqrt{3}, 0)$, estremi del segmento:



5) **[T.E. 26/01/2009]**

Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\left[|z - 3i|^2 + \text{Re}(z + 6\overline{z})\text{Im}(z - \overline{z})i - (7i + 1)z\overline{z}\right] \in \mathbb{R}.$$

Svolgimento.

Dobbiamo trovare i numeri complessi $z = x + iy$ che, sostituiti nell'espressione assegnata, danno luogo ad un numero complesso $a + ib$ in quadra che sia reale, ossia che abbia parte immaginaria nulla. Dovremo cioè imporre $b = 0$.

Poiché sicuramente $|z - 3i|^2 \in \mathbb{R}$ (essendo il modulo al quadrato di un certo numero complesso) non ci interessa calcolarlo ai fini dell'esercizio.
Poniamo $z = x + iy$ e calcoliamo il numero complesso tra parentesi quadre.
Troviamo (ricordandoci che $z \cdot \overline{z} = |z|^2$):

$$\left[|z-3i|^2 + \mathrm{Re}(x+iy+6(x-iy))\mathrm{Im}(x+iy-(x-iy))i - (7i+1)(x^2+y^2)\right],$$

da cui

$$\left[|z-3i|^2 + (7x)(2y)i - 7i(x^2+y^2) + x^2 + y^2\right].$$

Raccogliendo parte reale e parte immaginaria, otteniamo

$$\left[|z-3i|^2 - x^2 - y^2 + i(-7x^2 - 7y^2 + 14xy)\right].$$

Affinché il numero appena individuato, di parte reale $a = |z - 3i|^2 - x^2 - y^2$ e parte immaginaria $b = -7x^2 - 7y^2 + 14xy$ sia un numero reale, deve succedere che la sua parte immaginaria valga 0.
Poniamo quindi uguale a zero la parte immaginaria e giungiamo all'equazione

$$-7x^2 - 7y^2 + 14xy = 0,$$

che, semplificata per -2, diviene

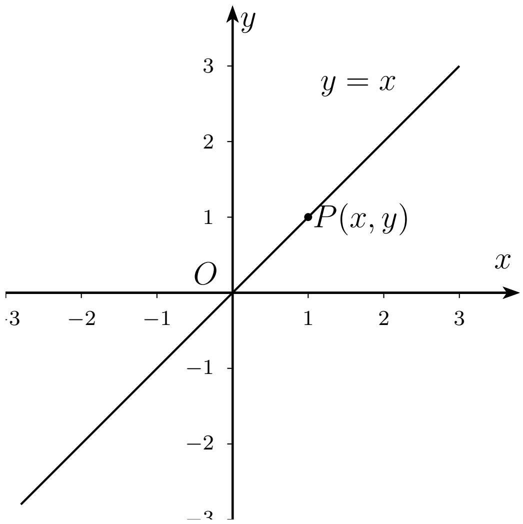
$$(y - x)^2 = 0,$$

da cui

$$y = x.$$

che è l'equazione di una retta.

In conclusione, i numeri complessi $z = x + iy$ che soddisfano la richiesta dell'esercizio sono rappresentati dagli infiniti punti $P(x, y)$ del piano cartesiano appartenenti alla retta $y = x$, che è quindi il luogo geometrico cercato.



6) Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C} \setminus \{0 + i0\}$ tali che

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1.$$

Svolgimento.

Osserviamo che il testo dell'esercizio ci dice di non considerare il numero complesso $0 + i0$: infatti, tale numero complesso annullerebbe il denominatore della frazione presente nell'equazione, rendendo l'equazione stessa priva di significato.

Procediamo con l'esercizio, scrivendo z in forma cartesiana, vale a dire scrivendo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.
Otteniamo

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{x+iy}\right) = 1.$$

Si ha

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Quindi l'equazione diventa

$$\mathrm{Re}\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right) = 1,$$

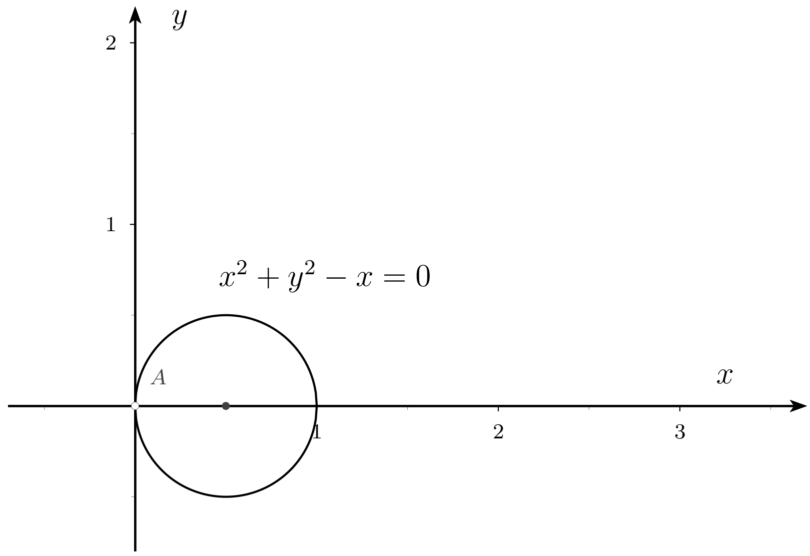
da cui

$$\frac{x}{x^2+y^2} = 1,$$

vale a dire

$$x^2 + y^2 - x = 0,$$

che è l'equazione di una circonferenza passante per l'origine a cui va tolto il punto $(0,0)$ (che è proprio l'origine degli assi).



7) [T.E. 10/12/2007]

Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$[\mathrm{Re}\,(i\overline{z}(z-2))]^2 - [\mathrm{Im}\,(z(\overline{z}-2i))]^2 = 0.$$

Svolgimento.

Vista la forma dell'equazione conviene passare alla rappresentazione $z = x + iy$.

Ricordando che $\overline{z} = x - iy$, si ottiene

$$[\mathrm{Re}\,(i(x-iy)(x+iy-2))]^2 - [\mathrm{Im}\,((x+iy)(x-iy-2i))]^2 = 0,$$

da cui

$$\left[\mathrm{Re}\,\left(-2y + i(x^2+y^2-2x)\right)\right]^2 - \left[\mathrm{Im}\,\left((x^2+y^2+2y+i(-2x))\right)\right]^2 = 0.$$

Passando a parte reale e immaginaria si ottiene l'equazione

$$[-2y]^2 - [-2x]^2 = 0,$$

che, ricordando che $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, equivale a

$$[-2y - (-2x)] \cdot [-2y + (-2x)] = 0,$$

vale a dire

$$(y-x)(y+x) = 0.$$

L'equazione è risolta quando $z = x + iy$ è tale che $y = x$ oppure $y = -x$. Le soluzioni sono cioè gli $z \in \mathbb{C}$ del tipo $z = x + ix$ oppure $z = x - ix$, con $x \in \mathbb{R}$, cioè gli $z \in \mathbb{C}$ rappresentati dai punti delle bisettrici dei quadranti.

8) **[T.E. 05/07/2007]**

Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$(z + 2\overline{z})^2 + |z - 3|^2 - 10\,(\mathrm{Re}z)^2 = 0.$$

Svolgimento.

Vista la struttura dell'equazione, conviene rappresentare z in forma algebrica, ossia $z = x + iy$.

Sostituendo, si ha

$$(x + iy + 2(x - iy))^2 + |x + iy - 3|^2 - 10\,(x)^2 = 0,$$

vale a dire

$$(3x - iy)^2 + |x - 3 + iy|^2 - 10x^2 = 0.$$

Con qualche calcolo si ottiene

$$9x^2 - y^2 - 6ixy + x^2 + 9 - 6x + y^2 - 10x^2 = 0,$$

che, raccogliendo, diviene

$$-6x + 9 + i(-6xy) = 0.$$

Affinché tale quantità sia uguale a $0 = 0 + i0$ deve succedere che sia parte reale sia parte immaginaria valgano 0. Si perviene pertanto al sistema

$$\begin{cases} -6x + 9 = 0 \\ -6xy = 0 \end{cases},$$

che equivale all'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} -6x + 9 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -6x + 9 = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Risolvendo si trova la soluzione $z = \dfrac{3}{2} + i0 = \dfrac{3}{2}$.

Tale soluzione corrisponde al punto $P\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ del piano cartesiano.

Pertanto il luogo cercato è costituito da un solo punto.

9) **[T.E. 29/06/2010]**

Determinare il luogo geometrico dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$z\left(z+\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)\operatorname{Re}\left(1+2i+z+\sqrt{3}i\bar{z}\right)=0.$$

Svolgimento.

L'equazione si presenta come il prodotto di tre fattori posto uguale a 0.
Applichiamo pertanto la legge di *annullamento del prodotto*, valida anche nel campo $\mathbb{C}$ (che, ricordiamolo, afferma che il prodotto di più fattori vale 0 quando almeno uno di tali fattori è 0).

Procediamo quindi annullando i vari fattori.

1° fattore.
Si ha banalmente $z = 0$, che è già una prima soluzione dell'equazione.
Tale soluzione è associata al punto $(0, 0)$ del piano cartesiano.

2° fattore.
Anche la seconda equazione,

$$z+\frac{\sqrt{3}}{3}i=0,$$

è immediatamente risolta (senza dover esplicitare z) ed ha per soluzione il numero complesso $z=-\frac{\sqrt{3}}{3}i=0-\frac{\sqrt{3}}{3}i$, ossia il punto $\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

3° fattore.

$$\operatorname{Re}\left(1+2i+z+\sqrt{3}i\bar{z}\right)=0.$$

In questo caso, invece, la soluzione non è immediata.

Come al solito, procediamo con la sostituzione $z = x + iy$.
Si ha

$$\operatorname{Re}\left(1+2i+x+iy+\sqrt{3}i(x-iy)\right)=0,$$

ossia

$$\operatorname{Re}\left(1+x+\sqrt{3}y+i\left(2+y+\sqrt{3}x\right)\right)=0.$$

Prendendo la parte reale del numero in tonda, si giunge all'equazione

$$1+x+\sqrt{3}y=0,$$

che, nel piano cartesiano, è l'equazione di una retta.

Quindi gli $z = x + iy$ che rendono 0 il terzo fattore sono tutti e soli gli z che, nel piano cartesiano, sono rappresentati dai punti della retta $1 + x + \sqrt{3}y = 0$.

Riassumendo, il luogo geometrico cercato è dato dall'unione di due punti e di una retta (osserviamo che i due punti non appartengono alla retta).

10) Si trovino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ del sistema

$$\begin{cases} (z + 2\overline{z})^2 + |z|^2 = 0 \\ \dfrac{1}{z - \overline{z}} = 3i \end{cases} .$$

Svolgimento.

Dobbiamo trovare gli $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano contemporaneamente entrambe le equazioni.

Cominciamo con la *prima equazione*,

$$(z + 2\overline{z})^2 + |z|^2 = 0.$$

Procediamo con la sostituzione $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$.
Si ha

$$(x + iy + 2(x - iy))^2 + x^2 + y^2 = 0,$$

da cui

$$(3x - iy)^2 + x^2 + y^2 = 0,$$

$$9x^2 - y^2 - 6ixy + x^2 + y^2 = 0,$$

cioè

$$10x^2 + i(-6xy) = 0 = 0 + i0.$$

Vogliamo che il numero complesso a primo membro coincida col numero $0 + i0$. Pertanto, dobbiamo porre uguali a 0 sia la sua parte reale sia la sua parte immaginaria. Otteniamo il sistema nelle incognite reali x e y

$$\begin{cases} 10x^2 = 0 \\ -6xy = 0 \end{cases} .$$

Dalla prima delle due equazioni si trova

$$x = 0.$$

Sostituendo nella seconda, si ottiene

$$-6 \cdot 0 \cdot y = 0,$$

ossia

$$0y = 0,$$

soddisfatta per ogni $y \in \mathbb{R}$.
Pertanto, la prima equazione del sistema complesso originario è soddisfatta da infiniti numeri complessi z, vale a dire tutti i numeri complessi della forma

$$z = 0 + iy = iy, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Graficamente, tali numeri complessi, sono rappresentati dagli infiniti punti di coordinate

$$P(0, y), \quad y \in \mathbb{R}$$

vale a dire gli infiniti punti dell'asse y.

Passiamo ora alla *seconda equazione*, cioè

$$\frac{1}{z - \overline{z}} = 3i.$$

Anzitutto escludiamo i valori di $z \in \mathbb{C}$ che fanno perdere di significato all'equazione, vale a dire quegli z che annullano il denominatore. Si deve imporre che

$$z - \overline{z} \neq 0,$$

vale a dire (passando alla forma cartesiana)

$$x + iy - (x - iy) \neq 0 + i0,$$

da cui

$$0 + 2iy \neq 0 + i0,$$

da cui

$$y \neq 0.$$

Quindi, affinché un numero complesso $z = x + iy$ possa soddisfare la seconda equazione, deve succedere perlomeno che $y \neq 0$.
Non vanno bene cioè i numeri della forma $z = x + i0 = x, \quad x \in \mathbb{R}$ (qualunque sia x).

Torniamo quindi alla risoluzione dell'equazione. Si ottiene

$$\frac{1}{2iy} = 3i.$$

Per mandar via la i dal denominatore, moltiplichiamo numeratore e denominatore della frazione per i (per poi sfruttare il fatto che $i^2 = -1$). Otteniamo

$$\frac{i}{-2y} = 3i,$$

da cui (ricordando che $y \neq 0$) si ottiene

$$i = -6iy,$$

cioè

$$i + 6iy = 0,$$

ossia

$$i(1 + 6y) = 0 = 0 + i0.$$

Tale equazione è soddisfatta se e solo se

$$1 + 6y = 0,$$

cioè, se e solo se

$$y = -\frac{1}{6}.$$

(infatti, la parte reale del numero complesso a primo membro è già uguale a 0)

Pertanto la seconda equazione del sistema è risolta dagli $z \in \mathbb{C}$ della forma

$$z = x - \frac{1}{6}i, \quad x \in \mathbb{R}$$

(soluzioni accettabili in quanto $y \neq 0$).
Tornando al sistema iniziale, abbiamo che esso è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{1}{6} \end{cases},$$

Cioè, la prima equazione è soddisfatta dagli infiniti numeri complessi

$$z = 0 + iy \quad \text{(dove si può scegliere la } y \text{ che si vuole),}$$

mentre la seconda è soddisfatta dagli infiniti numeri complessi

$$z = x - \frac{1}{6}i \quad \text{(dove si può scegliere la } x \text{ che si vuole).}$$

Pertanto, il numero che soddisfa entrambe le equazioni è

$$z = 0 - \frac{1}{6}i.$$

11) **[T.E. 20/04/2011]**

Determinare il luogo geometrico del piano di Gauss descritto da

$$\left[|z+iz|^2-(z+3)\overline{z}\right]\,\mathrm{Im}\left(\frac{-i}{|z|+i}\right)=0.$$

Svolgimento.

L'equazione si presenta come il prodotto di due fattori eguagliato al numero complesso $0+i0$. Poiché in $\mathbb{C}$ vale la legge di annullamento del prodotto, l'equazione sarà soddisfatta da quegli $z\in\mathbb{C}$ che annullano o il primo o il secondo fattore.
L'equazione diviene quindi

$$\left[|z+iz|^2-(z+3)\overline{z}\right]=0 \quad \cup \quad \mathrm{Im}\left(\frac{-i}{|z|+i}\right)=0.$$

Cominciamo a risolvere la prima equazione.
Poniamo $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$. Risulta

$$|x+iy+i(x+iy)|^2-(x+iy+3)(x-iy)=0,$$

da cui

$$|x-y+i(x+y)|^2-(x+iy)(x-iy)-3(x-iy)=0$$

e ancora

$$(x-y)^2+(x+y)^2-(x^2+y^2)-3x+3iy=0.$$

Sviluppando i calcoli e raccogliendo opportunamente otteniamo

$$x^2+y^2-3x+i(3y)=0=0+i0.$$

Affinché il numero a primo membro sia uguale a $0+i0$ deve succedere che contemporaneamente la sua parte reale e la sua parte immaginaria siano nulle:

$$\begin{cases} x^2+y^2-3x=0 \\ 3y=0 \end{cases}.$$

Dalla seconda equazione si ricava immediatamente $y=0$. Sostituendo nella prima otteniamo l'equazione nella sola $x\in\mathbb{R}$

$$x^2-3x=0,$$

che risolta dà

$$x=3 \quad \cup \quad x=0.$$

Quindi, le soluzioni del sistema sono

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} ,$$

da cui i due numeri complessi

$$z_1 = 3 + i0 = 3 \;\; \text{e} \;\; z_2 = 0 + i0 = 0,$$

che, nel piano di Gauss, corrispondono ai due punti $(3, 0)$ e $(0, 0)$.
Per il momento, il luogo geometrico è costituito da due punti.
Dobbiamo ora unire le soluzioni della seconda delle due equazioni che stiamo studiando.

Consideriamo quindi la seconda equazione

$$\operatorname{Im}\left(\frac{-i}{|z| + i}\right) = 0.$$

Ci viene chiesto di porre uguale a 0 la parte immaginaria del numero complesso che compare in tonda.

Osserviamo anzitutto che compare l'incognita z a denominatore.
Dobbiamo pertanto preoccuparci di escludere eventuali valori dell'incognita $z \in \mathbb{C}$ che annullino il denominatore.
Poniamo quindi

$$|z| + i \neq 0 + i0.$$

È facile osservare che tale quantità non potrà mai essere uguale al numero complesso $0 + i0$: infatti è scrivibile come

$$\sqrt{x^2 + y^2} + i \cdot 1,$$

che è un numero della forma $a + ib,\;\; a, b \in \mathbb{R}$, essendo $a = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $b = 1$. Poiché la parte immaginaria è costantemente uguale a 1, tale numero non potrà mai annullarsi (anche se la parte reale dovesse annullarsi). Ricordiamo infatti che un numero complesso vale 0 se e soltanto se valgono 0 sia la sua parte reale che la sua parte immaginaria.
Quindi, non c'è alcuno $z \in \mathbb{C}$ che crei problemi al denominatore della frazione.

Procediamo con l'esercizio, cercando di scrivere il numero in tonda nella forma $c + id,\;\; c, d \in \mathbb{R}$.
Poiché compare la i a denominatore, procediamo con l'usuale tecnica:

$$\frac{-i}{\sqrt{x^2 + y^2} + i} = \frac{-i}{\sqrt{x^2 + y^2} + i} \cdot \frac{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - i\right)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - i\right)} =$$

$$= \frac{-i\sqrt{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2+1} = \frac{-1}{x^2+y^2+1} + i \cdot \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+1} = c + id.$$

Vogliamo che la parte immaginaria di tale numero sia nulla. Poniamo allora

$$\frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+1} = 0,$$

da cui (ricordando che il denominatore non è mai uguale a 0), otteniamo l'equazione equivalente

$$x^2 + y^2 = 0,$$

che è soddisfatta dall'unica coppia $x = 0$ e $y = 0$ (infatti, una somma di quadrati risulta nulla se e soltanto se sono nulli entrambi i quadrati che la costituiscono; in caso contrario tale somma risulterebbe un numero strettamente maggiore di 0. Pertanto si deve avere $x^2 = 0$, da cui $x = 0$ **e** $y^2 = 0$, da cui $y = 0$).
Quindi, la seconda equazione è risolta dall'unico numero complesso $z = 0 + i0$, che, nel piano di Gauss, corrisponde al punto $(0, 0)$, già trovato risolvendo la prima delle due equazioni.

In conclusione, il luogo geometrico cercato è dato dall'unione dei due punti

$$(3, 0), \quad (0, 0).$$

FORMA ESPONENZIALE, POTENZE E RADICI DI NUMERI COMPLESSI

Ricordiamo il collegamento esistente tra forma algebrica/cartesiana ed esponenziale di un numero complesso z.

La rappresentazione algebrica o cartesiana consiste nel vedere il numero complesso z come segue:

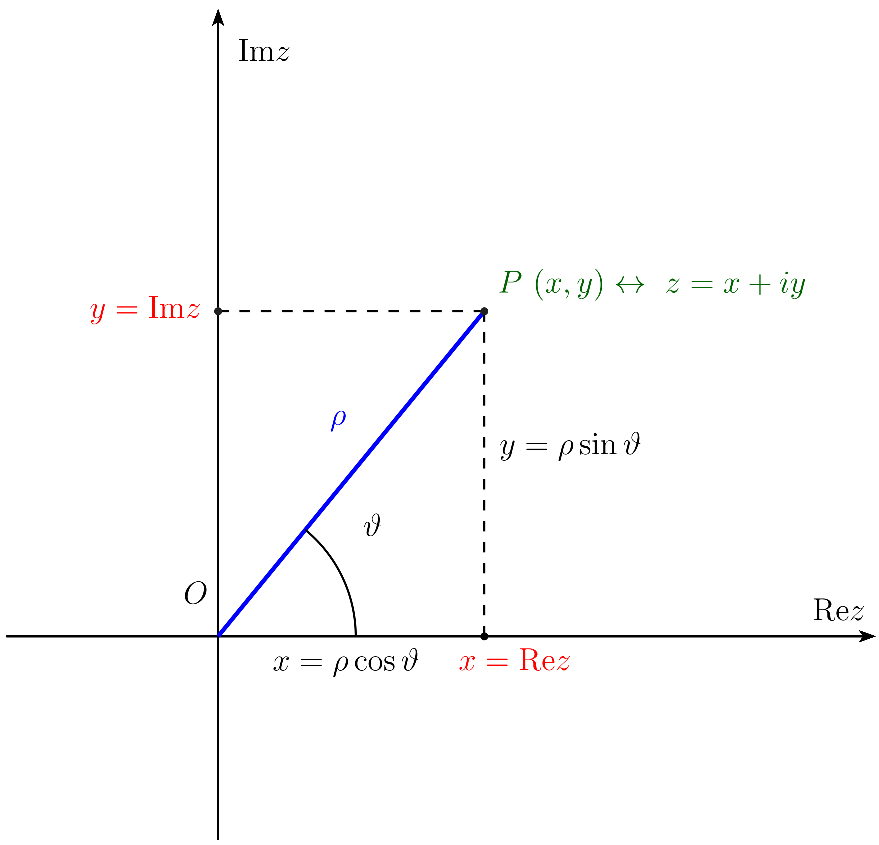
$$z = x + iy = \mathrm{Re}z + i \cdot \mathrm{Im}z.$$

Dato un numero complesso $z = x + iy$, individuato nel piano cartesiano dal punto $P(x, y)$, la sua **forma esponenziale** è la seguente:

$$\boldsymbol{z = \rho e^{i\vartheta}}.$$

ove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ è il modulo di z, mentre ϑ è uno degli infiniti angoli ϑ che si vengono a formare tra il segmento PO e la direzione positiva dell'asse x (ossia la retta corrispondente a $\mathrm{Re}z$).

In figura mostriamo la situazione.



Il legame tra forma esponenziale e algebrica di un numero complesso z lo si ricava ricordando le ben note formule trigonometriche sui triangoli rettangoli:

(1) $$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases} .$$

In questo modo, conoscendo la rappresentazione esponenziale del numero è banale ricavare la x (parte reale) e la y (parte immaginaria), necessarie per poter scrivere il numero in forma cartesiana.

Viceversa, noto il numero nella forma $z = x + iy$, come passare alla sua equivalente forma esponenziale, ossia $z = \rho e^{i\vartheta}$?
Ci accorgiamo immediatamente che per poter fare ciò è necessario conoscere ρ e ϑ.

- ρ, ossia il modulo, è subito trovato.
  Si ha infatti, per definizione, $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Per quanto riguarda ϑ utilizzeremo nuovamente le formule (1). Si ricava immediatamente
  $$\begin{cases} \cos\vartheta = \left(\dfrac{x}{\rho}\right) \\ \sin\vartheta = \left(\dfrac{y}{\rho}\right) \end{cases} .$$
  Quest'ultimo sistema è risolto da un opportuno angolo ϑ (e ovviamente da tutti quelli ottenuti da esso per periodicità di 2π).
  Trovato anche ϑ siamo pronti per poter scrivere il numero in forma esponenziale.

Riportiamo due esempi per ripassare la trasformazione dall'una all'altra forma.

1) Dato il numero $z = 3e^{\frac{5}{6}\pi i}$, scriverlo in forma cartesiana.

Svolgimento.

Dobbiamo scrivere il numero z nella forma $z = x + iy$, conoscendo la sua forma esponenziale, vale a dire $\rho = 3$ e $\vartheta = \dfrac{5}{6}\pi$.

Dalle (1) si ottiene immediatamente:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta = 3\cos\left(\dfrac{5}{6}\pi\right) \\ y = \rho\sin\vartheta = 3\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi\right) \end{cases} ,$$

da cui

$$\begin{cases} x = 3 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ y = 3 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2} \end{cases} .$$

Pertanto, il numero z in forma algebrica diviene

$$z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}.$$

2) Dato il numero complesso $z = -i - 1$ in forma algebrica, scriverlo in forma esponenziale.

Svolgimento.

Anzitutto riscriviamo z in modo ordinato, ossia come $z = -1 - i$. Osserviamo che tale numero corrisponde al punto $P(-1, -1)$.

A questo punto procediamo con l'esercizio.
Dobbiamo scrivere z nella forma

$$z = \rho e^{i\vartheta}.$$

Abbiamo quindi bisogno di ρ e di ϑ.
Come già anticipato nei richiami generali, il calcolo di ρ è immediato.
Si ha infatti

$$\rho := |z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Calcoliamo ora ϑ. Dalle formule (1) si ricava

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \left(\dfrac{x}{\rho}\right) = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\vartheta = \left(\dfrac{y}{\rho}\right) = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Dobbiamo quindi individuare un angolo ϑ tale che

$$\begin{cases} \cos\vartheta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\vartheta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

È ben noto che in $[0, 2\pi]$ tale angolo è $\vartheta = \frac{5}{4}\pi$. Osserviamo che in luogo di $\frac{5}{4}\pi$ può essere scelto un qualsiasi altro angolo ϑ della forma $\vartheta = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, come ad esempio $-\frac{3\pi}{4}, \frac{13}{4}\pi, -\frac{11}{4}\pi$, ecc. .
Possiamo scrivere finalmente il numero z in forma esponenziale, essendo in possesso sia di $\rho = \sqrt{2}$ sia di $\vartheta = \frac{5\pi}{4}$. Si ha

$$z = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}.$$

Ricordiamo, come già visto a lezione, la forma esponenziale dei numeri fondamentali $1, i, -1, -i$: si ha

$$\boldsymbol{1 = e^{0i}}, \qquad \boldsymbol{i = e^{\frac{\pi}{2}i}}, \qquad \boldsymbol{-1 = e^{\pi i}}, \qquad \boldsymbol{-i = e^{\frac{3}{2}\pi i}},$$

da cui si ricava pure la forma esponenziale di numeri della forma $z = a,\ a \in \mathbb{R},\ z = ib,\ b \in \mathbb{R}$. Ad esempio

$$z = -5 = 5 \cdot (-1) = 5e^{\pi i}, \quad z = 3i = 3 \cdot (i) = 3e^{\frac{\pi}{2}i}, \text{ ecc...},$$

come osservato in aula.
Ricordiamo pure che, nei casi generali, le costanti moltiplicative possono essere raccolte e non essere coinvolte nel corso della trasformazione.

Ad esempio: si scriva in forma esponenziale il numero $z = -\frac{25\sqrt{3}}{2} - \frac{25}{2}i$.
È opportuno raccogliere come segue:

$$z = 25\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right),$$

trasformare il numero $w = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ottenendo $w = e^{\frac{7}{6}\pi i}$ e rimoltiplicare per 25. Cioè

$$z = 25\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 25 \cdot e^{\frac{7}{6}\pi i}.$$

Mentre la forma algebrica dei numeri complessi ben si presta all'operazione di somma, la forma esponenziale dei numeri complessi è molto comoda per fare moltiplicazioni, potenze e radici di numeri complessi.

Moltiplicazioni e Divisioni

Assegnati due numeri complessi $z_1 = \rho_1 e^{i\vartheta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\vartheta_2}$ si ha

$$z_1 \cdot z_2 = \left(\rho_1 e^{i\vartheta_1}\right) \cdot \left(\rho_2 e^{i\vartheta_2}\right) = \rho_1 \cdot \rho_2 e^{(\vartheta_1 + \vartheta_2)i}$$

e, analogamente, supponendo $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\vartheta_1}}{\rho_2 e^{i\vartheta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{(\vartheta_1 - \vartheta_2)i}$$

Potenze

Assegnato $z = \rho e^{i\vartheta}$ ed $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$z^n = \left(\rho e^{i\vartheta}\right)^n = \rho^n e^{in\vartheta}.$$

Osservazione.

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\boldsymbol{|z^n| = |z|^n},$$

cioè, il modulo del numero complesso z^n è uguale al valore del modulo di z elevato alla potenza n. La prova di questo fatto è stata vista a lezione.

RADICI $n-$ESIME DI UN NUMERO COMPLESSO

Siano $n \in \mathbb{N}$ e $w \in \mathbb{C}$. Chiamiamo *radici $n-$esime* di w quei numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^n = w$.

Ossia, quei numeri $z \in \mathbb{C}$ che risolvono l'equazione complessa

$$z^n = w.$$

Ricordiamo che le radici $n-$esime di un numero complesso sono sempre n (Teorema Fondamentale dell'Algebra).

Ma come calcolare le n radici $n-$esime di un assegnato numero complesso $w = \rho e^{i\vartheta}$?
Le radici $n-$esime complesse di w sono

$$(2) \qquad \boldsymbol{z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{\frac{(\vartheta + 2k\pi)\, i}{n}}}, \quad \text{per } \boldsymbol{k = 0, \ldots, n-1}.$$

Dalla precedente formula ci si convince facilmente del fatto che le n radici di un numero complesso $z = \rho e^{i\vartheta}$ si dispongano ai vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di centro $O(0,0)$ e raggio $r = \sqrt[n]{\rho}$.

Chiariamo il significato dell'ultima formula con degli esempi.

1) Calcolare le radici terze del numero complesso $z = 2 - 2i$.

Svolgimento.

Per prima cosa, trasformiamo il numero z in forma esponenziale, in quanto, la formula di cui disponiamo per il calcolo delle radici di un numero complesso richiede che il numero stesso sia espresso in notazione esponenziale.

Dobbiamo scrivere cioè z nella forma $z = \rho e^{i\vartheta}$.

Si ha anzitutto

$$\rho = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Come al solito, per il calcolo di ϑ si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \left(\dfrac{x}{\rho}\right) = \left(\dfrac{2}{2\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\vartheta = \left(\dfrac{y}{\rho}\right) = \left(-\dfrac{2}{2\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases},$$

vale a dire

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\vartheta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases},$$

che è risolto, ad esempio, da $\vartheta = -\dfrac{\pi}{4}$.

Possiamo quindi riscrivere

$$z = \sqrt{8}e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

Procediamo col calcolo delle radici terze.

Si tratta di trovare 3 numeri complessi w_1, w_2, w_3 tali che $w_1^3 = z$, $w_2^3 = z$ e $w_3^3 = z$.

Per calcolarli, utilizziamo la formula (2) ricordando che nel nostro caso si ha:

- $z = \sqrt{8}e^{-\frac{\pi}{4}i}$
- $\boldsymbol{n = 3}$, in quanto stiamo calcolando le radici ***terze***. Quindi $n - 1 = 3 - 1 = 2$, pertanto $k = 0, ..., 2$.

Quindi le tre radici terze di z sono i numeri

$$w_k = \sqrt[3]{\sqrt{8}} \cdot e^{\dfrac{\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i}{3}} \quad : \quad \text{per} \quad k = 0, 1, 2,$$

vale a dire l'insieme costituito dai tre numeri complessi

$$w_0 = \sqrt[6]{8} \cdot e^{\dfrac{\left(-\frac{\pi}{4} + 0\pi\right)i}{3}} \qquad \text{(si è sostituito al posto di } k \text{ il valore 0)},$$

$$w_1 = \sqrt[6]{8} \cdot e^{\dfrac{\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)i}{3}} \qquad \text{(si è sostituito al posto di } k \text{ il valore 1)},$$

$$w_2 = \sqrt[6]{8} \cdot e^{\dfrac{\left(-\frac{\pi}{4} + 4\pi\right)i}{3}} \qquad \text{(si è sostituito al posto di } k \text{ il valore 2)}.$$

Facendo i calcoli si ottengono i numeri

$$w_0 = \sqrt[6]{8}e^{-\frac{\pi}{12}i}, \quad w_1 = \sqrt[6]{8}e^{\frac{7\pi}{12}i}, \quad w_2 = \sqrt[6]{8}e^{\frac{5\pi}{4}i},$$

che sono le radici cercate.
Rappresentando tali numeri sul piano cartesiano, ci accorgiamo, in accordo col risultato teorico, che sono disposti ai vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro $O(0,0)$ e raggio $r = \sqrt[6]{8}$.

Sfruttando tale risultato teorico, sarebbe stato possibile ricavare in maniera più rapida le tre radici complesse cercate. In effetti, essendo tali radici disposte ai vertici di un poligono regolare di $n = 3$ lati (cioè un triangolo equilatero) inscritto nella circonefrenza di centro $(0,0)$ e raggio $r = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{8}$, sarebbe stato sufficiente calcolare con la formula la prima di tali radici (w_0, quella corrispondente a $k = 0$), dopodiché, ricordando che in presenza di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza l'angolo al centro di 2π risulta diviso in 3 angoli uguali (che separano i vertici a due a due) che misurano ciascuno $\dfrac{2\pi}{3}$, avremmo ottenuto le rimanenti due soluzioni aggiungendo, volta per volta, l'angolo $\dfrac{2\pi}{3}$ all'angolo che individua la soluzione appena trovata.

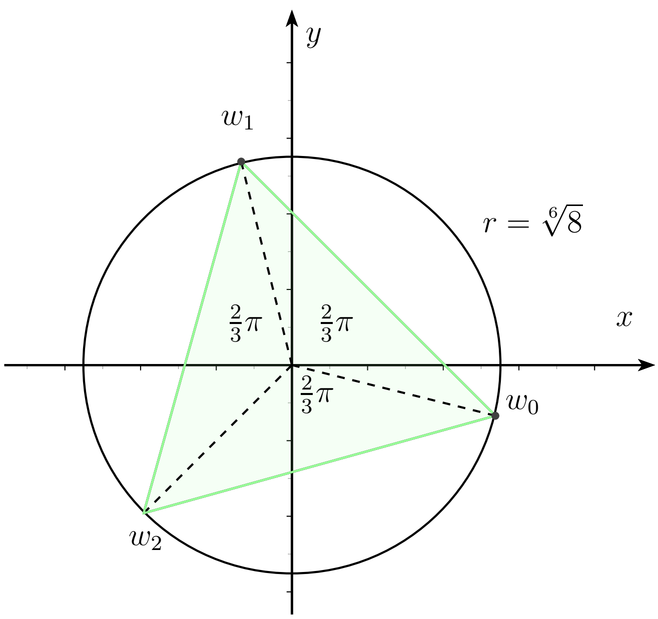
Spieghiamo meglio.
Calcolata

$$w_0 = \sqrt[6]{8}e^{-\frac{\pi}{12}i},$$

si ha immediatamente,

$$w_1 = \sqrt[6]{8}e^{\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)i} = \sqrt[6]{8}e^{\frac{7\pi}{12}i}, \qquad w_2 = \sqrt[6]{8}e^{\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)i} = \sqrt[6]{8}e^{\frac{15\pi}{12}i} = \sqrt[6]{8}e^{\frac{5\pi}{4}i},$$

che sono esattamente le soluzioni calcolate con la formula.
Abbiamo voluto calcolare le tre radici col metodo più lungo per cercare di familiarizzare con la formula (comunque indispensabile per calcolare almeno la prima delle radici).
Mostriamo nella figura che segue la situazione.



2) **[T.E. 05/07/2007]**

Scrivere in forma cartesiana le radici terze del numero complesso

$$w = \sqrt{2}\left(\frac{4-4i}{|2-2i|}\right) - 2.$$

Svolgimento.

Il numero non si presenta in forma esponenziale.
Quindi, per prima cosa, procediamo con la sua trasformazione.

Occupiamoci per il momento dell'addendo

$$u = \sqrt{2}\left(\frac{4-4i}{|2-2i|}\right) = \frac{\sqrt{2}}{|2-2i|}(4-4i).$$

Si ha

$$|2-2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Quindi

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(4-4i) = \frac{1}{2}(4-4i) = 2-2i.$$

Pertanto

$$w = \sqrt{2}\left(\frac{4-4i}{|2-2i|}\right) - 2 = 2-2i-2 = -2i.$$

Per quanto già osservato negli esempi precedenti, il calcolo della forma esponenziale di $w = -2i$ è immediata, trattandosi di un numero a parte reale nulla.
Infatti si ha (ricordando che $-i = e^{\frac{3\pi}{2}i}$)

$$-2i = 2(-i) = 2e^{\frac{3\pi}{2}i} = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

A questo punto possiamo calcolare le tre radici terze di w.
Si ha

$$z_k = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i}{3}} \quad : \quad \text{per} \;\; k = 0, 1, 2.$$

Calcoliamo solamente z_0, dopodiché aggiungiamo, di volta in volta, l'angolo $\frac{2\pi}{3}$ per individuare le rimanenti:

$$z_0 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

Si ha allora

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)i} = \sqrt[3]{2} e^{\frac{\pi}{2}i}, \qquad z_2 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)i} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{7\pi}{6}i}.$$

Il testo chiede di scrivere le radici in forma cartesiana, ossia nella forma $z = x + iy$.
Ricordiamo che

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases},$$

quindi

$$z = x + iy = \rho \cos \vartheta + i \rho \sin \vartheta.$$

Comiciamo da $z_0 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{6}i}$.
Si ha

$$z_0 = \sqrt[3]{2} \cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sqrt[3]{2} \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right).$$

Consideriamo ora $z_1 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{\pi}{2}i}$.
Risulta

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \cos \left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sqrt[3]{2} \sin \left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{2} \left(0 + i \cdot 1\right) = \sqrt[3]{2} i.$$

Infine

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \cos \left(\frac{7\pi}{6}\right) + i \sqrt[3]{2} \sin \left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2} \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right).$$

Riepilogando, le tre radici complesse di w scritte in forma cartesiana sono

$$z_0 = \sqrt[3]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right), \quad z_1 = \sqrt[3]{2} i, \quad z_2 = \sqrt[3]{2} \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right).$$

3) **[T.E. 29/01/2010]**
Sia

$$w = \frac{2}{\sqrt{2}} \left[\left| \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right| - i e^{3\pi i} \right].$$

Determinare le radici terze complesse di w.

Svolgimento.

Poiché dobbiamo calcolare le radici terze, dobbiamo anzitutto scrivere w in forma esponenziale.
Prima di tutto, però, è necessario semplificare la scrittura del numero w, per poi procedere alla trasformazione in rappresentazione esponenziale.

Lavoriamo all'interno della quadra.
Cominciamo col calcolare il primo modulo: si ha

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1.$$

Inoltre

$$e^{3\pi i} = e^{\pi i} = -1.$$

Pertanto possiamo scrivere

$$w = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| - ie^{3\pi i}\right] = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[1-i(-1)\right] = \frac{2}{\sqrt{2}}(1+i).$$

A questo punto possiamo finalmente trasformare il numero w nella forma $w = \rho e^{i\vartheta}$.
La costante moltiplicativa, $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$, per il momento non la consideriamo (come siamo abituati a fare).
Trasformiamo il numero in tonda

$$u = 1+i.$$

Si ha

$$|u| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2},$$

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\vartheta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

da cui, ad esempio, $\vartheta = \dfrac{\pi}{4}$.

Pertanto si ha

$$u = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i},$$

da cui

$$w = \frac{2}{\sqrt{2}}(1+i) = \frac{2}{\sqrt{2}}u = \frac{2}{2}\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = 2e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

Dobbiamo quindi calcolare le radici terze di

$$w = 2e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

Si ha

$$z_k = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\dfrac{\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) i}{3}} \quad \text{per} \quad k = 0, 1, 2,$$

ossia i tre numeri complessi

$$z_0 = \sqrt[3]{2} e^{\frac{\pi}{12} i}, \quad z_1 = \sqrt[3]{2} e^{\frac{3}{4} \pi i}, \quad z_2 = \sqrt[3]{2} e^{\frac{17}{12} \pi i}.$$

4) Posto $k = (73)^2$, si dica quanto vale il numero complesso i^k.

Svolgimento.

Anzitutto cominciamo con l'osservare che

$$i^0 = 1 \quad i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = i \cdot i^2 = -i \quad i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1$$

$$i^5 = i \quad i^6 = -1 \quad i^7 = -i \qquad\qquad i^8 = 1,$$

ecc., da cui

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Fatta questa premessa, cerchiamo di stabilire la natura dell'esponente k.

Si ha

$$k = (73)^2 = (72+1)^2 = 72^2 + 2 \cdot 72 + 1.$$

Essendo 72 un multiplo di 4, ne segue che pure 72^2 e $2 \cdot 72$ sono dei multipli di 4. Pertanto, il numero $(73)^2$ è datto dalla somma di due multipli di 4 (che è ancora un multiplo di 4) a cui è sommato 1. Quindi possiamo scrivere

$$k = (73)^2 = 4n + 1, \qquad \text{per un certo} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Quindi, alla luce dell'osservazione precedente, si ha

$$i^k = i^{(73)^2} = i^{4n+1} = i,$$

e l'esercizio è concluso.

5) **[T.E. 20/01/2011]**
Determinare in forma algebrica/cartesiana le soluzioni della seguente equazione in campo complesso

$$z^4 - i\left|1 + i\sqrt{3}\right| z = 0.$$

Svolgimento.

Raccogliendo la z otteniamo

$$z \cdot \left(z^3 - i\left|1 + i\sqrt{3}\right|\right) = 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto, il problema diviene

$$z = 0 \quad \cup \quad \left(z^3 - i\left|1 + i\sqrt{3}\right|\right) = 0.$$

Si ha immediatamente la soluzione $z = 0 = 0 + i0$ che corrisponde al punto $(0,0)$ del piano di Gauss.

Determiniamo ora le soluzioni dell'equazione

$$z^3 - i\left|1 + i\sqrt{3}\right| = 0.$$

Nell'equazione compare il modulo di un numero complesso noto; possiamo quindi calcolarlo: ù

$$|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2.$$

Pertanto l'equazione diviene

$$z^3 - 2i = 0,$$

vale a dire

$$z^3 = 2i.$$

Risolvere tale equazione significa trovare gli $z \in \mathbb{C}$ che elevati alla terza danno per risultato $2i$.
Dobbiamo quindi determinare le tre radici terze del numero complesso $2i$.
Scriviamo tale numero in forma esponenziale. Si ha immediatamente

$$2i = 2 \cdot i = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{2}i}.$$

Le tre radici terze di tale numero sono gli elementi dell'insieme

$$\left\{ z_k = \sqrt[3]{2}e^{\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)}, \quad k = 0,1,2 \right\}.$$

Sostituendo, volta per volta, i valori di k da 0 a 2, otteniamo

$$z_0 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{6}i}, \quad z_1 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{5\pi}{6}i}, \quad z_2 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{3\pi}{2}i}.$$

Scriviamo tali numeri in forma algebrica.
Risulta

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right),$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right),$$

$$\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=\sqrt[3]{2}\,(0+i(-1))=-\sqrt[3]{2}i.$$

Le soluzioni dell'equazione assegnata sono quindi

$$z_0=\sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right),\qquad z_1=\sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right),\qquad z_2=-\sqrt[3]{2}i,\qquad z_4=0.$$

EQUAZIONI POLINOMIALI DI GRADO n IN $\mathbb{C}$

Si tratta di equazioni della forma

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0,$$

ove $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ sono detti coefficienti dell'equazione e l'incognita è $z \in \mathbb{C}$.

Se $a_n \neq 0$, allora l'equazione si dice polinomiale di grado n.

Il Teorema Fondamentale dell'Algebra, del quale ora riportiamo l'enunciato, garantisce che una tale equazione ammetta sempre n soluzioni $z \in \mathbb{C}$.

Teorema Fondamentale dell'Algebra.
Ogni equazione polinomiale di grado n in $\mathbb{C}$ ammette esattamente n soluzioni $z \in \mathbb{C}$ (a patto di considerarle con la loro molteplicità).

Di conseguenza un'equazione polinomiale di grado 3 ammette sempre 3 soluzioni complesse. Un'equazione di grado 5 ne ammette sempre 5, e così via.

Noi analizzeremo in particolare le equazioni polinomiali di grado 2, distinguendo i casi in cui i coefficienti siano effettivamente complessi e in cui siano reali (pur essendo, in ciascun caso, l'incognita z complessa).

EQUAZIONI POLINOMIALI DI SECONDO GRADO in $\mathbb{C}$

Caso a coefficienti reali.

Sia assegnata un'equazione polinomiale di secondo grado nell'incognita complessa z:

$$az^2 + bz + c = 0, \quad \text{con} \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Tale equazione ammette sempre due soluzioni $z \in \mathbb{C}$ (Teorema Fondamentale dell'Algebra).

Per risolvere un'equazione di questo tipo possiamo ricorrere alla ben nota formula risolutiva di equazioni di secondo grado ad incognita reale.

Si ha
$$z_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

ove il simbolo di radice quadrata va inteso nel senso usuale introdotto in $\mathbb{R}$, con la convenzione che $\sqrt{-1} = i$.

Ad esempio, si risolva l'equazione
$$3z^2 - 3z + 4 = 0.$$
Si ha
$$z_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-48}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{-39}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{39 \cdot (-1)}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{39} \cdot \sqrt{-1}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{39} \cdot i}{6}.$$

Caso a coefficienti complessi.

Si consideri ora l'equazione
$$az^2 + bz + c = 0, \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{C}.$$

Per un'equazione di questo tipo non faremo ricorso alla nota formula risolutiva.
Procediamo come segue.
Moltiplichiamo tutti i termini dell'equazione per $4a \neq 0$ (secondo principio di equivalenza delle equazioni):
$$4az^2 + 4abz + 4ac = 0.$$

Sommiamo e sottraiamo b^2 ottenendo
$$4az^2 + 4abz + b^2 - b^2 + 4ac = 0,$$

da cui
$$(2az + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Detti
$$w = 2az + b, \quad \Delta = b^2 - 4ac \ \ (\text{essendo } b^2 - 4ac \in \mathbb{C}),$$

dobbiamo risolvere l'equazione
$$w^2 = \Delta.$$

Si tratta cioè di calcolare le due radici complesse di ordine 2 del numero complesso Δ: siano esse w_0 e w_1.

Ricordando ora che

$$2az + b = w,$$

otteniamo le due soluzioni

$$z_1 = \frac{-b + w_0}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + w_2}{2a}$$

dell'equazione originaria.

Mostriamo un esempio che megli spieghi quanto appena esposto.

1) Si risolva l'equazione in campo complesso

$$z^2 - 4z - i + 4 = 0.$$

Svolgimento.

Si tratta di un'equazione polinomiale di secondo grado completa nell'incognita complessa z del tipo

$$az^2 + bz + c = 0,$$

ove $a = 1,\ b = -4,\ c = -i + 4$. I coefficienti sono quindi complessi.

Vogliamo applicare lo schema appena illustrato.
Dobbiamo anzitutto calcolare le due radici complesse $w_0,\ w_1$ del numero complesso

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(-i + 4) = 16 + 4i - 16 = 4i.$$

Scriviamo $4i$ in forma esponenziale: si ha, banalmente,

$$4i = 4 \cdot i = 4e^{\frac{\pi}{2}i}.$$

Calcoliamone le due radici di ordine 2 complesse: si ha

$$w_k = \sqrt[2]{4}e^{\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}i} : \ k = 0, 1,$$

cioè le due radici

$$w_0 = 2e^{\frac{\pi}{4}i} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$w_1 = 2e^{\frac{5}{4}\pi i} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Pertanto

$$z_0 = \frac{-b + w_0}{2a} = \frac{4 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} = \frac{4 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$$

sono le due soluzioni dell'equazione originaria.

ESERCIZI DI RIEPILOGO

1) Si risolva l'equazione in campo complesso:

$$|z|^2 + iz + iz^3 - i\overline{z} = 0$$

Svolgimento.

Vista la presenza del termine z^3 non conviene passare immediatamente alla forma algebrica/cartesiana di z, per evitare di sviluppare il cubo di binomio $(x + iy)^3$.

Cerchiamo piuttosto di manipolare algebricamente l'equazione, scrivendola in una forma più trattabile.

Ricordiamo che

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}.$$

Riscriviamo dunque l'equazione come

$$z \cdot \overline{z} + iz + iz^3 - i\overline{z} = 0.$$

Raccogliamo opportunamente. Si ha

$$\overline{z}(z - i) + iz(z^2 + 1) = 0,$$

da cui, ricordando che $i^2 = -1$,

$$\overline{z}(z - i) + iz(z + i)(z - i) = 0.$$

A questo punto è possibile raccogliere il fattore comune $(z - i)$. Risulta

$$(z - i) \cdot [\overline{z} + iz(z + i)] = 0,$$

da cui

$$(z - i) \cdot \left(\overline{z} + iz^2 - z\right) = 0.$$

L'equazione si presenta ora come il prodotto di due fattori in $\mathbb{C}$ eguagliato al numero complesso $0 = 0 + i0$.
Per la legge di annullamento del prodotto, l'equazione si riscrive come

$$z - i = 0 \quad \cup \quad \overline{z} + iz^2 - z = 0.$$

Dobbiamo quindi trovare gli $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano o la prima o la seconda delle due equazioni.

La prima equazione è immediatamente risolta (senza bisogno di scrivere z in forma algebrica): si ha infatti

$$z = i,$$

vale a dire il punto $(0, 1)$ nel piano cartesiano.

Risolviamo ora la seconda delle due equazioni. Passando alla forma algebrica $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, otteniamo

$$x - iy + i(x + iy)^2 - (x + iy) = 0,$$

da cui

$$x - iy + i(x^2 - y^2 + 2ixy) - x - iy = 0,$$

che, sviluppando i calcoli e separando parte reale e parte immaginaria, diviene

$$-2xy + i\left(x^2 - y^2 - 2y\right) = 0.$$

Il membro di sinistra, che è un nuovo numero complesso di parte reale $-2xy$ e parte immaginaria $(x^2 - y^2 - 2y)$, deve essere posto uguale al numero complesso $0 + i0$.
Dobbiamo pertanto imporre che valgano 0 sia la sua parte reale che la sua parte immaginaria.
Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -2xy = 0 \\ x^2 - y^2 - 2y = 0 \end{cases}.$$

Il sistema equivale all'unione dei due sistemi

$$(A) \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - y^2 - 2y = 0 \end{cases} \quad \cup \quad (B) \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - y^2 - 2y = 0 \end{cases}.$$

Il sistema (A) diviene

$$\begin{cases} x = 0 \\ -y^2 - 2y = 0 \end{cases},$$

che, risolto, dà luogo alle due soluzioni

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases},$$

vale a dire i due numeri complessi

$$z_1 = 0 + i0 = 0 \quad \text{e} \quad z_2 = 0 + i(-2) = -2i,$$

che, nel piano cartesiano corrispondono ai due punti $(0,0)$ e $(0,-2)$.
Risolvendo il sistema (B) otteniamo

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases},$$

che ha l'unica soluzione

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

già trovata dal sistema precedente (e che, pertanto, non va a modificare il risultato).

In definitiva le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione originaria sono i numeri complessi

$$z_0 = i, \qquad z_1 = 0, \qquad z_2 = -2i.$$

Il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ che risolvono l'equazione è dato quindi dall'unione di tre punti; per la precisione, i punti

$$(0,1), \qquad (0,0), \qquad (0,-2).$$

2) **[T.E. 11/01/2010]**
Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\left[\mathrm{Re}(z+3) - e^{i\pi/2}|z|^2 - z\overline{(z+4)} + 5(z+\overline{z})i - \mathrm{Im}\left(\frac{3}{i^3}\right)\right] \in \mathbb{R}.$$

Svolgimento.

Ci viene chiesto di stabilire quali siano i numeri $z \in \mathbb{C}$ che, sostituiti nel testo, diano luogo, in parentesi quadra, ad un certo numero complesso $a + ib, a, b \in \mathbb{R}$ che sia reale.
Ciò accadrà se e solo se la parte immaginaria b risulta uguale a 0.

Siamo quindi interessati al calcolo della parte immaginaria del numero che otterremo (vale a dire, la parte moltiplicata dall'unità immaginaria i).
È quindi ben chiaro che non siamo interessati al calcolo esplicito delle quantità

$$\mathrm{Re}(z+3) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}\left(\frac{3}{i^3}\right),$$

in quanto, trattandosi di parte reale e parte immaginaria di due opportuni numeri complessi, sono sicuramente dei numeri reali, che rientreranno nel termine $a \in \mathbb{R}$ del numero finale.

Lasceremo quindi indicate così come sono tali quantità.
Procediamo con la sostituzione $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.
Ricordiamo, inoltre, che

$$e^{i\pi/2} = i.$$

Il numero in quadra risulta

$$\mathrm{Re}(z+3) - i(x^2+y^2) - (x+iy)(x-iy+4) + 5(x+iy+x-iy)i - \mathrm{Im}\left(\frac{3}{i^3}\right),$$

cioè

$$\mathrm{Re}(z+3) - i(x^2+y^2) - x^2 - y^2 - 4x - 4iy + 10ix - \mathrm{Im}\left(\frac{3}{i^3}\right),$$

da cui

$$\mathrm{Re}(z+3) - \mathrm{Im}\left(\frac{3}{i^3}\right) - x^2 - y^2 - 4x + i(-x^2 - y^2 - 4y + 10x).$$

Abbiamo effettivamente individuato un numero complesso di

$$\text{parte reale} \quad a = \mathrm{Re}(z+3) - \mathrm{Im}\left(\frac{3}{i^3}\right) - x^2 - y^2 - 4x,$$

$$\text{parte immaginaria} \quad b = -x^2 - y^2 + 10x - 4y.$$

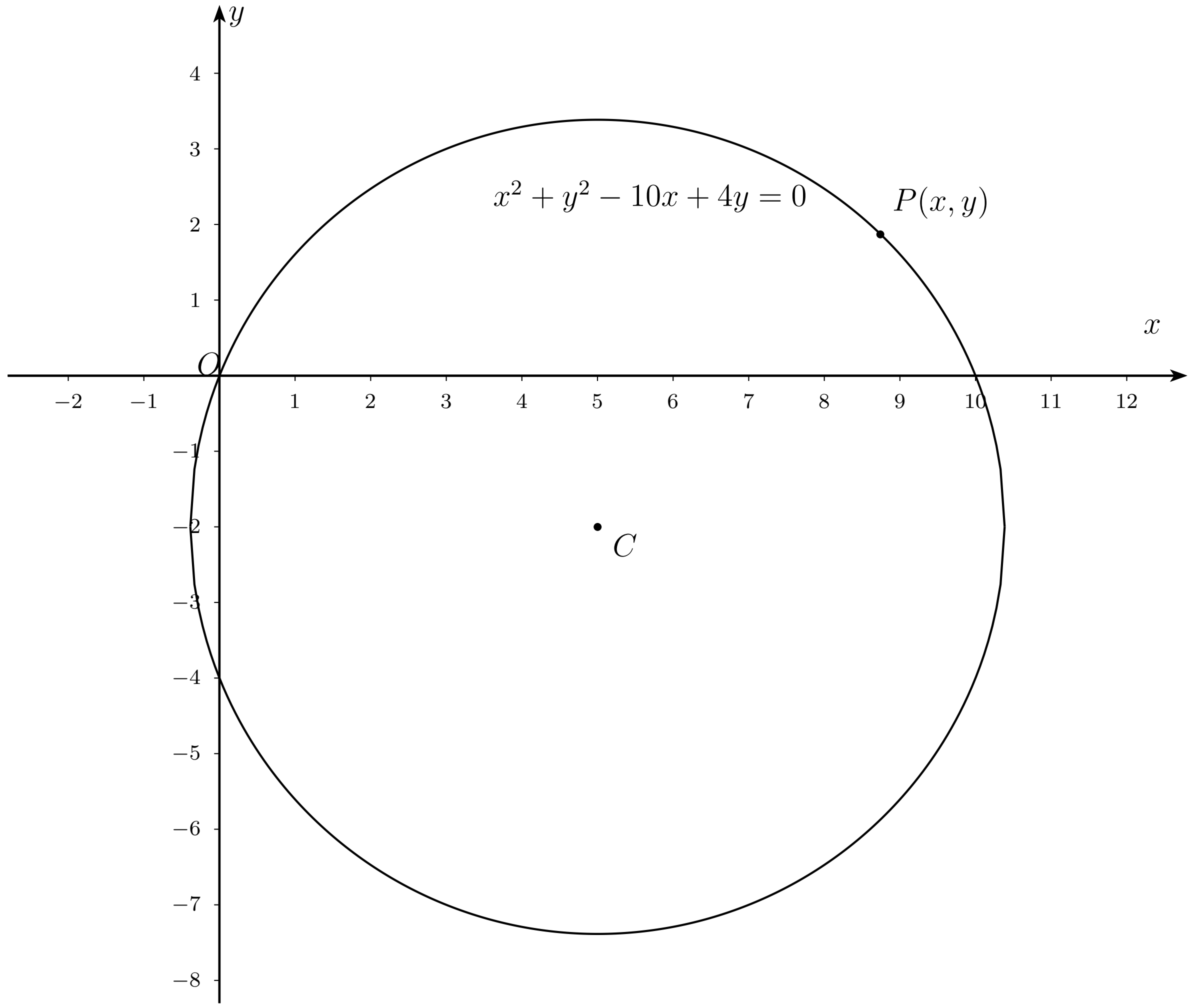
Affinché tale numero risulti reale, dobbiamo eguagliare a 0 la sua parte immaginaria. Giungiamo all'equazione

$$-x^2 - y^2 + 10x - 4y = 0,$$

vale a dire

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y = 0,$$

che è l'equazione di una circonferenza. In particolare, la circonferenza di centro $(5, -2)$ e raggio $\sqrt{29}$.
Pertanto, gli $z = x + iy$ che risolvono l'equazione originaria sono tutti e soli gli z che, nel piano cartesiano, si identificano con i punti $P(x, y)$ appartenenti alla circonferenza appena trovata, che è, quindi, il luogo geometrico cercato.



3) Si trovino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z^4 + 1)(z^2 + 2iz + i) = 0.$$

Svolgimento.

L'equazione è di tipo polinomiale: in particolare è costituita dal prodotto di due polinomi a coefficienti complessi nell'indeterminata z.

Complessivamente il grado del polinomio è $4 + 2 = 6$.
Ci si aspetta quindi, in base al teorema Fondamentale dell'Algebra, di individuare 6 soluzioni complesse z, a patto di contarle con la loro molteplicità.

Trattandosi di un prodotto posto uguale a 0, la legge di annullamento del prodotto, ci autorizza a calcolare separatamente gli zeri di ciascuno dei due fattori che compaiono.

Cominciamo quindi a trovare le soluzioni di

$$z^4 + i = 0.$$

Tale equazione, meglio scrivibile come

$$z^4 = -i,$$

è risolta da quei numeri $z \in \mathbb{C}$ che elevati a potenza 4 danno per risultato il numero complesso $-i$. Si tratta, cioè, delle quattro radici quarte complesse del numero $w = -i$.
Dobbiamo quindi scrivere w in forma esponenziale e ricavarne le sue radici quarte.
Si ha immediatamente

$$w = -i = e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

Poiché sappiamo che le radici quarte di tale numero complesso si dispongono ai vertici di un poligono regolare di $n = 4$ lati, vale a dire un quadrato, inscritto nella circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $r = \sqrt[4]{1} = 1$, procediamo come segue.
Calcoliamo, utilizzando la formula, la prima di tali radici quarte, Dopodiché, ricordando che gli angoli al centro di un quadrato inscritto in una circonferenza sono 4 e misurano ciascuno $\dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$, otterremo le rimanenti tre soluzioni aggiungendo, volta per volta, l'angolo $\dfrac{\pi}{2}$ all'angolo che individua la soluzione appena trovata.

Calcoliamo quindi z_0.
Si ha

$$z_0 = 1e^{\frac{-\frac{\pi}{2}+0}{4}i} = e^{-\frac{\pi}{8}i}.$$

Pertanto si avrà

$$z_1 = 1e^{\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)i} = e^{\frac{3\pi}{8}i}, \qquad z_2 = 1e^{\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)i} = e^{\frac{7\pi}{8}i}$$

$$z_3 = 1e^{\left(\frac{7\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)i} = e^{\frac{11\pi}{8}i}.$$

Per adesso, l'equazione assegnata, ha le quattro soluzioni complesse

$$z_0 = e^{-\frac{\pi}{8}i}, \qquad z_1 = e^{\frac{3\pi}{8}i}, \qquad z_2 = e^{\frac{7\pi}{8}i}, \qquad z_3 = e^{\frac{11\pi}{8}i}.$$

Risolviamo la seconda delle due equazioni:

$$z^2 + 2iz + i = 0.$$

Si tratta di un'equazione polinomiale di grado 2 a coefficienti *complessi* del tipo

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C},$$

in cui $a = 1, b = 2i, c = i$.

Ricordando quanto esposto nelle pagine precedenti, le sue due soluzioni complesse sono

$$z_4 = \frac{-b + w_0}{2a}, \qquad z_5 = \frac{-b + w_1}{2a},$$

essendo w_0 e w_1 le due radici complesse di ordine 2 di

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Calcoliamo quindi il valore di Δ. Si ha

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2i)^2 - 4(1)(i) = -4 - 4i.$$

Per calcolarne le due radici complesse di ordine 2, dobbiamo scrivere il numero $\Delta = -4 - 4i$ in forma esponenziale.
Si ha

$$\rho_\Delta = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2},$$

$$\begin{cases} \cos\vartheta_\Delta = \dfrac{-4}{4\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\vartheta_\Delta = \dfrac{-4}{4\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases},$$

da cui

$$\vartheta_\Delta = \frac{5}{4}\pi.$$

Quindi

$$\Delta = 4\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}.$$

Le sue radici quadrate sono

$$w_0 = 2\sqrt[4]{2}e^{\frac{5\pi}{8}i} = 2\sqrt[4]{2}\cos\frac{5\pi}{8} + i2\sqrt[4]{2}\sin\frac{5\pi}{8},$$

$$w_1 = 2\sqrt[4]{2}e^{\frac{\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi\right)}{2}i} = 2\sqrt[4]{2}e^{\frac{13\pi}{8}i} = 2\sqrt[4]{2}\cos\frac{13\pi}{8} + i2\sqrt[4]{2}\sin\frac{13\pi}{8}.$$

Abbiamo lasciato indicate, senza calcolarle, le funzioni goniometriche degli angoli $\frac{5\pi}{8}$ e $\frac{13\pi}{8}$, in quanto si tratta di angoli non notevoli.
In definitiva, applicando la formula e semplificando numeratore e denominatore per 2, otteniamo

$$z_4 = = -i + \sqrt[4]{2}\cos\frac{5\pi}{8} + i\sqrt[4]{2}\sin\frac{5\pi}{8} =$$

$$= \sqrt[4]{2}\cos\frac{5\pi}{8} + i\left(-1 + \sqrt[4]{2}\sin\frac{5\pi}{8}\right),$$

$$z_5 = -\,i + \sqrt[4]{2}\cos\frac{13\pi}{8} + i\sqrt[4]{2}\sin\frac{13\pi}{8} =$$
$$= \sqrt[4]{2}\cos\frac{13\pi}{8} + i\left(-1 + \sqrt[4]{2}\sin\frac{13\pi}{8}\right),$$

Abbiamo così calcolato tutte e 6 le soluzioni dell'equazione data.

4) **[T.E. 04/04/2012]**

Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^4 = \left(\left|\sqrt{3} - i\right|^2 \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}i}\right)^5 \operatorname{Im}(3+2i)e^{i\pi/4}.$$

Svolgimento.

Osserviamo che l'incognita z compare solo a primo membro. Il secondo membro è noto, necessita solamente di essere scritto in forma più semplice.
L'equazione assegnata è quindi del tipo

$$z^4 = w, \quad w \text{ assegnato}.$$

Si tratterà dunque di calcolare le radici quarte del numero complesso w che compare a secondo membro.
Procediamo quindi coi passaggi necessari per scrivere in forma esponenziale il numero complesso

$$\left(\left|\sqrt{3} - i\right|^2 \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}i}\right)^5 \operatorname{Im}(3+2i)e^{i\pi/4}.$$

Cominciamo a calcolare

$$\left|\sqrt{3} - i\right|^2.$$

Si ha immediatamente

$$\left|\sqrt{3} - i\right|^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2 = 4.$$

Scriviamo il numero

$$u := 1 + i$$

in forma esponenziale.
Si ha

$$\rho_u = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

e

$$\begin{cases} \cos\vartheta_u = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\vartheta_u = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases},$$

pertanto si ha, ad esempio,

$$\vartheta_u = \frac{\pi}{4}.$$

Quindi

$$u = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

Sappiamo invece che il numero complesso

$$i$$

si scrive immediatamente come

$$e^{i\pi/2}.$$

Quindi si ha

$$\left(\left|\sqrt{3}-i\right|^2 \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}i}\right) = \left(4 \cdot \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{i\pi/2}}\right) = \left(4 \cdot e^{-i\pi/4}\right),$$

da cui

$$\left(\left|\sqrt{3}-i\right|^2 \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}i}\right)^5 = \left(4 \cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^5 = 4^5 e^{-\frac{5\pi}{4}i}.$$

Poiché

$$\mathrm{Im}(3+2i) = 2,$$

possiamo finalmente scrivere il secondo membro come

$$\left(\left|\sqrt{3}-i\right|^2 \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}i}\right)^5 \mathrm{Im}(3+2i)e^{i\pi/4} = 4^5 e^{-\frac{5\pi}{4}i} \cdot 2e^{\frac{\pi}{4}i} =$$

$$= 2^{11} \cdot e^{-\pi i} = 2^{11} \cdot e^{\pi i}.$$

L'equazione da risolvere è quindi

$$z^4 = 2^{11} \cdot e^{\pi i}.$$

Dobbiamo allora calcolare, come già anticipato, le 4 radici quarte di

$$w = 2^{11} \cdot e^{\pi i}.$$

Si ha

$$z_k = \sqrt[4]{2^{11}} \cdot e^{\frac{\pi + 2k\pi}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Sostituendo, volta per volta, i valori di k da 0 a 3 si trovano le quattro radici:

$$z_0 = 4\sqrt[4]{8}e^{\frac{\pi}{4}i} = 4\sqrt[4]{8} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4}i + i\sin\frac{\pi}{4}i\right) = 4\sqrt[4]{8} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt{2}(1+i) =$$

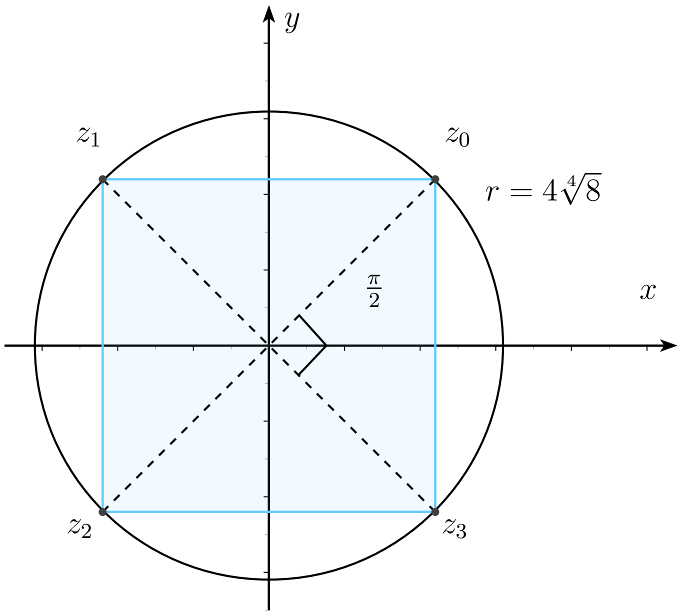
$$= 2^{\frac{9}{4}}(1+i),$$

$$z_1 = 4\sqrt[4]{8}e^{\frac{\pi+2\pi}{4}i} = 4\sqrt[4]{8}e^{\frac{3\pi}{4}i} = 4\sqrt[4]{8} \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{4}i + i\sin\frac{3\pi}{4}i\right) = 2^{\frac{9}{4}}(-1+i),$$

$$z_2 = 4\sqrt[4]{8}e^{\frac{\pi+4\pi}{4}i} = 4\sqrt[4]{8}e^{\frac{5\pi}{4}i} = 4\sqrt[4]{8} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{4}i + i\sin\frac{5\pi}{4}i\right) = 2^{\frac{9}{4}}(-1-i),$$

$$z_3 = 4\sqrt[4]{8}e^{\frac{\pi+6\pi}{4}i} = 4\sqrt[4]{8}e^{\frac{7\pi}{4}i} = 4\sqrt[4]{8} \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{4}i + i\sin\frac{7\pi}{4}i\right) = 2^{\frac{9}{4}}(1-i).$$

Osserviamo che, calcolata $z_0 = 4\sqrt[4]{8}e^{\frac{\pi}{4}i}$, avremmo potuto ottenere le altre radici aggiungendo, volta per volta, l'angolo $\frac{\pi}{2}$ all'angolo appena trovato (a causa del fatto che le 4 radici quarte si dispongono ai vertici di un poligono regolare di 4 lati, vale a dire un quadrato, nel quale i vertici sono separati a due a due da un angolo al centro di $\frac{\pi}{2}$).



5) **[T.E. 11/06/2012]**

Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{7}{e^{i\pi/2}} z^2 \overline{z} + \frac{\mathrm{Im} z}{e^{3i\pi}} + i7|z|^2 \mathrm{Re} z = 0.$$

Svolgimento.

Ricordiamo anzitutto che

$$e^{i\pi/2} = i, \quad e^{3i\pi} = e^{i\pi} = -1.$$

Quindi

$$\frac{7}{e^{i\pi/2}} = \frac{7}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{7i}{-1} = -7i.$$

Ricordiamo inoltre che

$$z\overline{z} = |z|^2.$$

Pertanto conviene procedere come segue:

$$z^2 z = z \cdot z \cdot \overline{z} = z|z|^2.$$

L'equazione diviene quindi

$$-7iz|z|^2 + \frac{y}{-1} + i7|z|^2(x) = 0,$$

cioè

$$-7iz|z|^2 - y + 7ix|z|^2 = 0.$$

Scrivendo

$$z = x + iy,$$

abbiamo

$$-7i(x^2 + y^2)(x + iy) - y + 7ix(x^2 + y^2) = 0,$$

cioè

$$-7ix(x^2 + y^2) + 7y(x^2 + y^2) - y + 7ix(x^2 + y^2) = 0,$$

da cui

$$7y(x^2 + y^2) - y = 0 + i0.$$

Il membro di sinistra è un numero complesso della forma

$$A + iB, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

ove

$$A = 7y(x^2 + y^2) - y, \quad B = 0.$$

Affinché tale numero sia il numero complesso $0+i0$ è necessario (e sufficiente) far sì che la parte reale A sia nulla (essendo già nulla la parte immeginaria B).
Dobbiamo pertanto richiedere che

$$7y(x^2 + y^2) - y = 0,$$

cioè

$$y\left[7(x^2 + y^2) - 1\right] = 0.$$

Tale equazione è soddisfatta per

$$y = 0 \;\text{ oppure }\; 7(x^2 + y^2) - 1 = 0.$$

Sono quindi soluzione dell'equazione originaria i numeri della forma

$$z = x + i0, \quad x \in \mathbb{R},$$

che corrispondono agli infiniti punti dell'asse x, e i numeri complessi $z = x + iy$ tali che

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{7},$$

che, nel piano cartesiano, corrispondono ai punti della circonferenza di centro l'origine e raggio $r = \sqrt{\frac{1}{7}}$.
In conclusione il luogo geometrico è costituito dall'unione di una circonferenza e di una retta.

6)[**T.E. 27/03/2013**]
Determinare il luogo dei punti del piano di Gauss definito dall'insieme dei numeri complessi

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \; \left[2\left(\overline{z}^2 + |z|^2\right) + 3iz\right] \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\right\}.$$

Svolgimento.

Posto $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, si tratta di riscrivere la quantità in parentesi graffa nella forma

$$A + iB, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

e fare in modo che il nuovo numero complesso ottenuto sia reale positivo o il numero complesso nullo.
Ciò capita se e solo se la parte immaginaria B è uguale a 0 (in tal modo il numero diviene reale) e la parte reale A è maggiore o uguale di 0 (nel caso in cui anche $A = 0$ si ottiene proprio il numero complesso nullo).
Da un punto di vista algebrico, garantire che contemporaneamente valgano le due richieste precedenti equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} A \geq 0 \\ B = 0 \end{cases}.$$

Cominciamo quindi a sostituire, nella parentesi graffa, z con la sua forma algebrica $x + iy$.
Si ha, ricordando le definizioni di coniugato e modulo di un numero complesso,

$$2\left[(x - iy)^2 + x^2 + y^2\right] + 3i(x + iy),$$

cioè

$$2\left(x^2 - y^2 - 2ixy + x^2 + y^2\right) + 3ix - 3y,$$

vale a dire

$$4x^2 - 3y - 4ixy + 3ix,$$

da cui
$$4x^2 - 3y + ix(-4y + 3).$$

Abbiamo quindi ottenuto il nuovo numero complesso
$$A + iB, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

essendo
$$A = 4x^2 - 3y, \quad B = x(-4y + 3).$$

A questo punto, per trovare le incognite x e y (note le quali otteniamo il numero cercato z), dobbiamo risolvere il sistema
$$\begin{cases} 4x^2 - 3y \geq 0 \\ x(-4y + 3) = 0. \end{cases}$$

Chiaramente, la seconda equazione fornisce immediatamente l'unione delle due soluzioni $x = 0$, $y = \frac{3}{4}$.

Otteniamo quindi l'unione dei due sistemi
$$\begin{cases} 4x^2 - 3y \geq 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \cup \qquad \begin{cases} 4x^2 - 3y \geq 0 \\ y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Risolviamo il primo. Sostituendo $x = 0$ nella prima disequazione troviamo
$$\begin{cases} -3y \geq 0 \\ x = 0 \end{cases},$$

da cui
$$\begin{cases} y \leq 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Abbiamo trovato infiniti punti: tutti i punti di ascissa nulla e ordinata minore o uguale di 0, vale a dire una semiretta (il semiasse negativo delle y).
Pertanto, per il momento, il luogo geometrico cercato consta di una semiretta.

Passiamo al secondo sistema. Sostituendo $y = \frac{3}{4}$ nella prima disequazione troviamo immediatamente
$$\begin{cases} 4x^2 - \frac{9}{4} \geq 0 \\ y = \frac{3}{4} \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} x^2 \geq \dfrac{9}{16} \\ y = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Si tratta di una disequazione di secondo grado nell'incognita reale x.
Gli zeri del polinomio sono

$$x_{1/2} = \pm\frac{3}{4},$$

da cui la soluzione della disequazione

$$x \leq -\frac{3}{4} \quad \cup \quad x \geq +\frac{3}{4}.$$

In definitiva, il sistema ha per soluzione

$$\begin{cases} x \leq -\dfrac{3}{4} \quad \cup \quad x \geq \dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{3}{4} \end{cases} \qquad ,$$

vale a dire gli infiniti punti $\left(x, \dfrac{3}{4}\right)$ con $x \leq -\dfrac{3}{4} \quad \cup \quad x \geq \dfrac{3}{4}$, vale a dire gli infiniti punti di due semirette di sostegno la retta orizzontale $y = \dfrac{3}{4}$, l'una avente per punto origine $\left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$, l'altra $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$.

In conclusione il luogo geometrico cercato è dato dall'unione di tre semirette, come schematizzato in figura.