ESERCIZI SUI LIMITI DI SUCCESSIONE E DI FUNZIONE TRATTI DA TEMI D'ESAME

a cura di Michele Scaglia

LIMITI NOTEVOLI

Ricordiamo i principali limiti notevoli che utilizzeremo nello svolgimento degli esercizi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha\cdot(\log x)^\beta=0 \quad \text{per ogni} \quad \alpha,\ \beta>0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,$$

da cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1.$$

SUCCESSIONI NOTEVOLI

Ricordiamo anche le principali successioni che intervengono nel calcolo dei limiti:

- $(a_n)=\log n$

- $(a_n) = n^\alpha$, con $\alpha > 0$
- $(a_n) = q^n$ (*successione geometrica*)
- $(a_n) = n!$, essendo
$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n(n-1)! \end{cases},$$
o, alternativamente,
$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, \qquad \text{ponendo } 0! = 1.$$
- $(a_n) = n^n$.

Ricordiamo pure la ben nota successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

che è una successione non negativa, strettamente crescente e limitata il cui limite è già stato richiamato in precedenza.

La **successione geometrica**, come già visto a teoria, ha il seguente comportamento:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |q| < 1 \ \text{ cioè } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ +\infty & \text{se } q > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}.$$

Si verifica immediatamente, applicando la definizione di limite, che

$$\lim_{n\to+\infty} \log n = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty \ \ (\alpha > 0),$$
$$\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} n^n = +\infty.$$

Si tratta cioè di successioni infinite per $n \to +\infty$.

Più avanti, parlando degli *ordini di infinito*, richiameremo la scala degli infiniti, sia nel caso delle successioni, che nel caso delle funzioni reali di variabile reale.

LIMITI CON CONFRONTI DI INFINITESIMI e INFINITI

FUNZIONI INFINITESIME

Ricordiamo che una funzione f si dice **infinitesima per $x \to x_0$** se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Assegnate due funzioni f e g, entrambe infinitesime per $x \to x_0$, diciamo che:

- f è un *infinitesimo di ordine superiore* rispetto a g se e solo se
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$
e scriveremo
$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0;$$
- f è un *infinitesimo di ordine inferiore* rispetto a g se e solo se
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty;$$
- f e g **hanno lo stesso ordine di infinitesimo per $x \to x_0$** se e solo se
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq \{0, \infty\}.$$
In altre parole, per $x \to x_0$, nessuna delle due funzioni tende a 0 più velocemente dell'altra. Infatti il risultato del limite precedente non vale né 0 né $\pm\infty$: se risultasse 0, significherebbe che la funzione a numeratore tende a 0 più rapidamente di quella a denominatore (si pensi, ad esempio, al caso $f(x) = x^5$ e $g(x) = 3x^2$), se risultasse $\pm\infty$, si avrebbe che la funzione a denominatore tende a 0 più rapidamente di quella a numeratore (si pensi, ad esempio, al caso $f(x) = 5x^3$ e $g(x) = x^7$). Se consideriamo, invece, $f(x) = x^2$ e $g(x) = 5x^2$, il limite del loro rapporto è uguale a $\frac{1}{5}$: nessuna delle due funzioni va a 0 più rapidamente dell'altra (da cui il termine infinitesimi dello stesso ordine).

Particolare attenzione merita il caso degli infinitesimi dello stesso ordine quando $\ell = 1$: diremo che f e g sono due **infinitesimi equivalenti** per $x \to x_0$ se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \mathbf{1}$$

e scriveremo

$$f \ \sim \ g \ \text{ per } x \to x_0,$$

che si legge f si comporta come g quando $x \to x_0$.
Il fatto che il precedente limite risulti uguale a 1 significa che, in prossimità di x_0, le due funzioni f e g tendono a 0 in modo *molto simile* (ancor più di quanto capiti nel caso generale in cui il limite del loro rapporto sia un certo ℓ reale diverso da 0 e da 1).

Tale somiglianza tra f e g in un intorno di x_0 suggerisce l'idea di poter approssimare, nel calcolo di un limite, una funzione infinitesima complessa con un infinitesimo ad essa equivalente. Torneremo più avanti su tale problema, specificando quali siano le condizioni per cui una approssimazione di questo tipo sia lecita.

Osserviamo anche che, data una funzione f infinitesima per $x \to x_0$, gli infinitesimi ad essa equivalenti sono generalmente infiniti. Nel corso degli esercizi, tuttavia, si cercherà di individuare infinitesimi equivalenti *semplici* che consentano di risolvere le forme indeterminate.

A partire da alcuni limiti fondamentali (o notevoli) richiamati nella prima pagina, è possibile ricavare numerosi infinitesimi equivalenti a funzioni trascendenti (goniometriche, esponenziali e logaritmiche).

ESEMPIO 1.

Poiché vale

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

si ha, in base alla definizione di *infinitesimi equivalenti*, che le funzioni $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x$ sono infinitesimi equivalenti per $x \to 0$, vale a dire

$$\sin x \quad \sim \quad x \quad \text{per} \quad x \to 0.$$

ESEMPIO 2.

Grazie ai limiti fondamentali e al *teorema di sostituzione*, possiamo anche affermare che

$$\sin(3x^2) \ \sim \ (3x^2) \ \text{ per } x \to 0.$$

Per dimostrare l'affermazione precedente è sufficiente controllare che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x^2)}{3x^2}=1.$$

Il limite, che si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$, può essere trattato per mezzo di una semplice sostituzione. Poniamo $y=3x^2$. Poiché $x\to 0$, si avrà banalmente che $y=3x^2\to 0$. Possiamo riscrivere il limite e trovarne facilmente il risultato. Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x^2)}{3x^2}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1,$$

a causa del limite fondamentale richiamato poco fa.
Poiché il limite precedente è risultato uguale a 1, possiamo concludere che $\sin(3x^2)$ e $(3x^2)$ siano due funzioni *infinitesime equivalenti* quando $x\to 0$, cioè

$$\sin(3x^2)\ \sim\ (3x^2)\ \text{ per } x\to 0.$$

Vediamo un altro esempio.

ESEMPIO 3.

Consideriamo la funzione

$$f(x)=\sin(x+2)\quad\text{per } x\to -2.$$

Poiché $x\to -2$ si ha banalmente $(x+2)\to 0$; ne segue che la funzione $\sin(x+2)$ è *infinitesima* quando $x\to -2$, in quanto il suo argomento tende a 0 e la funzione sin è continua in 0.
Si intuisce, in forza del limite notevole richiamato poco fa, che la funzione f sia un infinitesimo equivalente a $(x+2)$ quando $x\to -2$. Per provarlo dovremo controllare che si abbia

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{x+2}=1.$$

In effetti, posto $y=(x+2)$, si ha subito, dal teorema di sostituzione,

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{\sin(x+2)}{x+2}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1,$$

da cui la scrittura

$$\sin(x+2)\quad\sim\quad(x+2)\quad\text{quando } x\to -2.$$

Vediamo un ultimo esempio in cui il punto di accumulazione è $+\infty$.

ESEMPIO 4.

Si chiede di analizzare il comportamento per $x \to +\infty$ della funzione

$$f(x) = \sin\left(\frac{3}{x}\right).$$

Poiché $x \to +\infty$, risulta che l'argomento del sin, vale a dire la frazione $\frac{3}{x}$, tende a 0.
Poiché la funzione sin è continua su tutto $\mathbb{R}$, in particolare in 0, si avrà che

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{3}{x}\right) = \sin(0) = 0,$$

cioè la funzione $f(x) = \sin\left(\frac{3}{x}\right)$ è *infinitesima* per $x \to +\infty$.
Chiaramente, anche in questo caso potremo sostituire la funzione f con un infinitesimo ad essa equivalente dedotto dal limite fondamentale.
In particolare, posto $y = \frac{3}{x}$, da cui $y \to 0$ per $x \to +\infty$, si ha, per il teorema di sostituzione,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{3}{x}\right)}{\left(\frac{3}{x}\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Poiché il precedente limite risulta uguale a 1, possiamo affermare che $\frac{3}{x}$ sia un *infinitesimo equivalente* a $\sin\left(\frac{3}{x}\right)$ per $x \to +\infty$, ovvero

$$\sin\left(\frac{3}{x}\right) \sim \left(\frac{3}{x}\right) \quad \text{quando } x \to +\infty.$$

Più in generale, ogniqualvolta l'argomento del sin tende a 0 per $x \to x_0$, il sin risulta essere un infinitesimo equivalente al proprio argomento.
Avremo quindi approssimazioni del tipo

$$\sin(x-1) \sim (x-1) \;\text{ per } x \to 1, \qquad \sin\left(\frac{5}{x^3}\right) \sim \left(\frac{5}{x^3}\right) \;\text{ per } x \to +\infty, \ldots.$$

Considerando anche gli altri limiti fondamentali, ricaviamo le seguenti approssimazioni valide per $x \to 0$:

$$(1-\cos \boldsymbol{x}) \sim \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^2, \qquad \sin \boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}, \qquad \tan \boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}, \qquad \arcsin \boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}, \qquad \arctan \boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}, \ldots$$

$$(e^{\boldsymbol{x}}-1) \sim \boldsymbol{x}, \qquad \log(1+\boldsymbol{x}) \sim \boldsymbol{x}, \ldots \qquad \textbf{per } \boldsymbol{x \to 0}$$

e tutte le loro conseguenze ottenute dall'applicazione del teorema di sostituzione.

In particolare, se $\boldsymbol{f(x) \to 0}$ per $\boldsymbol{x \to x_0}$, avremo

$$(1-\cos[\boldsymbol{f(x)}]) \sim \frac{1}{2}[\boldsymbol{f(x)}]^2, \qquad \sin[\boldsymbol{f(x)}] \sim \boldsymbol{f(x)}, \qquad \tan[\boldsymbol{f(x)}] \sim \boldsymbol{f(x)},$$

$$\arcsin[\boldsymbol{f(x)}] \sim \boldsymbol{f(x)}, \qquad \arctan[\boldsymbol{f(x)}] \sim \boldsymbol{f(x)},$$

$$\left(e^{\boldsymbol{f(x)}}-1\right) \sim \boldsymbol{f(x)}, \qquad \log(1+[\boldsymbol{f(x)}]) \sim \boldsymbol{f(x)}, \ldots$$

Mostriamo degli esempi concreti:

$$e^{x+3}-1 \sim (x+3) \quad \text{per } x \to -3, \qquad \log\left(1+\frac{1}{x^4}\right) \sim \frac{1}{x^4} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

$$[1-\cos(5x)] \sim \frac{1}{2}(5x)^2 = \frac{25}{2}x^2 \quad \text{per } x \to 0, \qquad \arctan(e^{-x}) \sim e^{-x} \quad \text{per } x \to +\infty, \ldots$$

e simili. Ripetiamo che le approssimazioni precedenti sono valide perché **l'argomento delle funzioni tende a 0 quando $\boldsymbol{x \to x_0}$** (come richiesto dai limiti fondamentali utilizzati).

La teoria degli infinitesimi equivalenti, come si anticipava qualche pagina fa, risulta estremamente utile nel calcolo dei limiti, infatti ci suggerisce di poter *approssimare*, in un intorno di un certo x_0, delle funzioni infinitesime piuttosto complesse attraverso delle funzioni polinomiali, ben più semplici da trattare. Quando calcoliamo un limite, infatti, la variabile indipendente tende ad un determinato valore x_0, pertanto verrebbe la tentazione di sostituire un termine infinitesimo con UN infinitesimo (polinomiale) ad esso equivalente.
Tuttavia un passaggio di questo tipo NON sempre è lecito.

- Se un *fattore* che compare nel limite in esame è costituito da un unico termine infinitesimo, la sostituzione è lecita.

- Se, invece, un *fattore* è infinitesimo perché somma di due o più *addendi* infinitesimi, in quel caso bisogna procedere con cautela controllando che **la sostituzione degli infinitesimi non porti a forme indeterminate o a cancellazioni di termini che contribuiscono al risultato finale**.

> Qualora si verificassero cancellazioni (cioè perdite di contributi infinitesimi, ma significativi), la sostituzione degli infinitesimi con gli infinitesimi polinomiali equivalenti dedotti dai limiti notevoli non consente di risolvere l'esercizio: in questi casi si devono utilizzare gli sviluppi in serie di Taylor per le funzioni derivabili.

Per poter risolvere esercizi di vario tipo è necessario affrontare le principali casistiche che si possono presentare e dedurre delle regole di calcolo utili alla introduzione degli infinitesimi equivalenti.

FUNZIONE POLINOMIALE INFINITESIMA

Come primo caso, consideriamo una *funzione* infinitesima già di tipo *polinomiale* costituita da più addendi infinitesimi.
Verifichemo tra poco che nel caso in cui una funzione sia un **infinitesimo** e di tipo polinomiale, un infinitesimo ad essa equivalente è dato dal **termine di grado più basso** del polinomio.

ESEMPIO 1.

Verifichiamo che risulta

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x \quad \sim \quad 3x = g(x) \quad \text{per } x \to 0.$$

Per dimostrare l'affermazione precedente dobbiamo provare, in base alla definizione di infinitesimi equivalenti, che

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

cioè

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x}{3x} = 1.$$

Risulta infatti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x^2 - 5x + 3)}{3 \cdot x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 5x + 3}{3} = 1.$$

Pertanto, per $x \to 0$, risulta determinante ai fini dello studio del comportamento del polinomio per $x \to 0$ il termine di grado inferiore, $3x$, detto ***termine principale***. Gli altri addendi, infinitesimi di ordine superiore, vengono raggruppati nella scrittura $o(x)$ (che si legge ***o piccolo di x***), a significare che si tratta di funzioni che tendono a 0 più velocemente della potenza $x = x^1$.

Nel caso di un *polinomio* scriveremo, in modo del tutto equivalente,

$$x^3 - 5x^2 + 3x \;=\; +3x \;+ o(x) \;\sim\; 3x \;\text{ per } x \to 0.$$

Il risultato ricavato in questo primo esempio è estendibile a qualsiasi polinomio infinitesimo (per $x \to x_0$): avremo allora approssimazioni quali

$$4x^2 \; -x \; + x^8 \;= -x + o(x) \;\sim\; -x \quad \text{per } x \to 0,$$

$$x^3 + \; x^2 \;=\; x^2 + o(x^2) \;\sim\; x^2 \quad \text{per } \; x \to 0,$$

e così via.
Tuttavia NON è necessario che il punto di accumulazione sia $x_0 = 0$.

ESEMPIO 2.

Consideriamo per $x \to +\infty$ la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{5}{x^2} + \frac{7}{x^5}.$$

Poiché $x \to +\infty$, si avrà chiaramente che $\frac{1}{x^3}, \; -\frac{5}{x^2}, \; \frac{7}{x^5} \; \to 0$.
Si potrebbe anche scrivere

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 7 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5.$$

Posto $y := \frac{1}{x}$, si avrebbe, per $x \to +\infty$, che $y \to 0$.
Pertanto, per le considerazioni precedenti, avremo

$$f(y) = y^3 \; -5y^2 + 7y^5 \;= -5y^2 + o(y^2) \;\sim\; -5y^2 \;\text{ poiché } \; y \to 0,$$

ovvero

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \; -\frac{5}{x^2} \; + \frac{7}{x^5} \;=\; -\frac{5}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \;\sim\; -\frac{5}{x^2} \;\text{ per } \; x \to +\infty.$$

ALTRI ESEMPI

ESEMPIO 3.

Consideriamo il limite di funzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-2x^2)}{1-\cos(3x)}.$$

Il limite, come si vede facilmente, si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$: $(1-2x^2)\to 1$ per $x\to 0$, la funzione log è continua in 1, per cui $\log(1-2x^2)\to\log 1=0$ per $x\to 0$.
Analogamente, $3x\to 0$ per $x\to 0$, la funzione cos è definita e continua in $x=0$, pertanto $1-\cos(3x)\to 1-\cos 0=1-1=0$.
Poiché sia numeratore che denominatore sono infinitesimi (tendono cioè a 0), cercheremo di sostituirli, nel calcolo del limite, con degli infinitesimi ad essi equivalenti dedotti dai limiti notevoli.
Ricordiamo che

$$\log(1+y)\ \sim\ y\ \text{ per } y\to 0.$$

Nel nostro esercizio si ha

$$\log(1-2x^2)=\log\left[1+(-2x^2)\right]\ \sim\ (-2x^2)\ \text{ per } x\to 0$$

dal momento che $y=(-2x^2)\to 0$ quando $x\to 0$.
Ancora, sempre dai limiti fondamentali, sappiamo che

$$1-\cos y\ \sim\ \frac{1}{2}y^2\ \text{ per } y\to 0.$$

Ne segue che, poiché $y=3x\to 0$ per $x\to 0$, si avrà

$$1-\cos(3x)=\sim\ \frac{1}{2}(3x)^2=\frac{9}{2}x^2\ \text{ per } x\to 0.$$

Torniamo al limite assegnato e troviamo, senza aver generato delle cancellazioni,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-2x^2)}{1-\cos(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{\frac{9}{2}x^2}=-\frac{4}{9}.$$

ESEMPIO 4.

Consideriamo il limite

$$\lim_{x\to 1}\frac{(e^x-e)^2}{\sin(3x-3)\cdot\arctan(1-x)}.$$

Grazie alla continuità delle funzioni e^t, $\sin t$, $\arctan t$, e considerato che $x\to 1$, il limite si

presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$.
Cerchiamo di trattare ciascun fattore per mezzo delle sostituzioni con gli infinitesimi equivalenti dedotti dai limiti fondamentali.
Cominciamo con il fattore

$$(e^x - e)^2.$$

La variabile indipendente x tende a 1, pertanto non possiamo applicare immediatamente il limite notevole

$$\lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

e la conseguente approssimazione

$$(e^y - 1) \quad \sim \quad y \quad \text{per } y \to 0.$$

Procediamo nel seguente modo. Risulta, raccogliendo a fattor comune,

$$e^x - e = e\left(\frac{e^x}{e} - 1\right) = e(e^{x-1} - 1).$$

A questo punto, posto $y = (x-1)$, si ha che $y \to 0$ poiché per ipotesi $x \to 1$.
Pertanto il fattore

$$(e^{x-1} - 1)$$

è proprio della forma

$$(e^y - 1) \;\; \text{con } y \to 0.$$

Poiché

$$e^y - 1 \quad \sim \quad y \;\; \text{per } y \to 0,$$

avremo, nel nostro caso,

$$e^{x-1} - 1 \quad \sim \quad (x-1) \quad \text{per } x \to 1,$$

da cui, in particolare,

$$(e^x - e) = e \cdot (e^{x-1} - 1) \;\sim\; e \cdot (x-1) \;\; \text{per } x \to 1,$$

e, ancora,

$$(e^x - e)^2 \;\sim\; [e \cdot (x-1)]^2 = e^2 \cdot (x-1)^2 \;\; \text{per } x \to 1.$$

Consideriamo il secondo fattore, $\sin(3x-3)$. Si ha chiaramente $3x - 3 \to 0$ per $x \to 1$.

Conviene quindi porre $y = (3x - 3) = 3(x - 1) \to 0$ e ricorerre all'approssimazione

$$\sin y \quad \sim \quad y \quad \text{per } y \to 0,$$

da cui

$$\sin(3x - 3) \quad \sim \quad 3(x - 1) \quad \text{per } x \to 1.$$

Infine, l'ultimo termine, $\arctan(1 - x)$, verrà trattato facendo riferimento all'approssimazione

$$\arctan y \quad \sim \quad y \quad \text{per } y \to 0,$$

dedotta dal limite fondamentale

$$\lim_{y \to 0} \frac{\arctan y}{y} = 1.$$

Posto $y = (1 - x) = -(x - 1) \to 0$ per $x \to 1$, avremo, per il teorema di sostituzione,

$$\arctan(1 - x) \quad \sim \quad (1 - x) = -(x - 1) \quad \text{per } x \to 1.$$

Riscriviamo il limite di partenza sostituendo a ciascun fattore infinitesimo un proprio infinitesimo polinomiale equivalente dedotto dai limiti fondamentali e dal teorema di sostituzione. Si trova

$$\lim_{x \to 1} \frac{(e^x - e)^2}{\sin(3x - 3) \cdot \arctan(1 - x)} = \lim_{x \to 1} \frac{e^2(x - 1)^2}{3 \cdot (x - 1) \cdot [-(x - 1)]} = -\frac{e^2}{3}.$$

FUNZIONI INFINITE

Analogamente a quanto accade per gli infinitesimi, si danno definizioni del tutto analoghe per le *funzioni infinite*, vale a dire quelle funzioni che tendono all'infinito quando $x \to x_0$. In particolare, nel calcolo di un limite, si cercherà di sostituire una funzione infinita con un *infinito* ad essa *equivalente* in un intorno di x_0.

Ricordiamo quindi le definizioni di **funzioni infinite** e, in particolare, di **infiniti equivalenti**.

Una funzione f definita in un intorno di x_0 si dice **infinita** per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty.$$

Date due funzioni f, g definite in un intorno di x_0 ed entrambe infinite per $x \to x_0$, si dice che:

- f è un **infinito di ordine superiore** rispetto a g se e solo se

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty;$$

  in altre parole, la funzione f tende all'infinito più velocemente di quanto tenda la funzione g. Si pensi, ad esempio, alle funzioni $f(x) = x^3$ e $g(x) = x$, entrambe infinite per $x \to +\infty$. Si ha

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty,$$

  cioè la funzione $f(x) = x^3$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $g(x) = x$.

- f è un **infinito di ordine inferiore** rispetto a g se e solo se

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

  in altre parole, la funzione f tende all'infinito meno velocemente di quanto tenda la funzione g. Si pensi all'esempio precedente, scambiano f con g.
  Nel caso delle funzioni del tipo x^n, l'ordine di infinito è tanto maggiore quanto maggiore è il grado n.

- f e g sono **infiniti dello stesso ordine** se e solo se

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

  In altre parole, due funzioni f e g sono infiniti dello stesso ordine quando tendono all'infinito alla stessa maniera (nessuna delle due è più veloce nel tendere all'infinito).

Anche per le funzioni infinite, merita particolare attenzione il caso degli *infiniti equivalenti*, estremamente utili nel calcolo dei limiti.

Più nel dettaglio, date due funzioni f e g entrambe infinite per $x \to x_0$, diremo che f e g sono **infiniti equivalenti per $x \to x_0$** se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

e scriveremo

$$f \ \sim \ g \quad \text{per } x \to x_0.$$

La somiglianza tra f e g per $x \to x_0$ è quindi molto forte (tanto da risultare uguale a 1 il precedente limite).

Come specificato per gli infinitesimi, osserviamo che anche gli infiniti equivalenti a una data funzione f per $f \to x_0$ sono generalmente infiniti. Tuttavia, nello svolgimento degli esercizi, si cercherà di individuare delle funzioni semplici.
L'idea, come vedremo, sarà quella di sostituire, nel calcolo di un limite, una funzione infinita f con UN **infinito** ad essa **equivalente** a patto di non creare forme indeterminate o cancellazioni.

Prima di procedere col calcolo dei limiti, è opportuno richiamare le principali funzioni/successioni e ordinarle in base al loro ordine di infinito.
In particolare si hanno le seguenti scale di infiniti (in ordine crescente, dalle funzioni con ordine di infinito inferiore alle funzioni con ordine di infinito via via superiore).

SCALA DEGLI INFINITI (per successioni e funzioni)

$$\log n \qquad n^{\alpha} \ \ (\text{con } \alpha > 0) \qquad q^n \ \ (\text{con } q > 1) \qquad n! \qquad n^n \qquad \text{per } n \to +\infty$$

Ogni termine della scala va all'infinito più rapidamente di qualsiasi altro termine che lo precede. Avremo quindi

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0, \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)!}{\log n} = +\infty, \qquad \lim_{n to +\infty} \frac{\log n}{\sqrt[3]{n}} = 0, \ldots$$

e così via.

Anche per le funzioni reali di variabile reale vale una scala analoga (per $x \to +\infty$):

$$\log x, \qquad x^{\alpha} \text{ con } \alpha > 0, \qquad a^x \text{ con } a > 1 \qquad \text{per } x \to +\infty,$$

con le medesime considerazioni del caso delle successioni.

Chiaramente, grazie al teorema di sostituzione (per funzioni e successioni), i precedenti risultati possono essere estesi al caso in cui l'argomento delle funzioni coinvolte non sia esattamente x o, ancora, al caso in cui il punto di accumulazione non sia necessariamente $+\infty$.

ESEMPIO.

Consideriamo il limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{\log(-x)},$$

in cui il punto di accumulazione è $-\infty$.
Poniamo $y = -x$, da cui $x = -y$. Risulta quindi $y \to +\infty$ quando $x \to -\infty$. Il limite diviene

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{\log(-x)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{(-y)^3}{\log y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{-y^3}{\log y} = -(+\infty) = -\infty,$$

dove il limite dell'ultimo quoziente vale $+\infty$ a causa della scala degli infiniti per $x \to +\infty$.

CALCOLO DI LIMITI CON GLI INFINITI EQUIVALENTI

Nel calcolo di un limite è utile approssimare un fattore infinito con un infinito ad esso equivalente per $x \to x_0$.

Analizziamo, con degli esempi, le varie situazioni che si possono presentare.

A) FUNZIONI POLINOMIALI

Partiamo con un esempio. Data la funzione

$$f(x) = 2x^3 - 5x + 1,$$

risulta che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Dimostreremo che

$$f(x) = 2x^3 - 5x + 1 \;\sim\; g(x) = 2x^3 \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Per provarlo sarà sufficiente verificare, in base alla definizione di infiniti equivalenti, che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{2x^3} = 1.$$

Risulta infatti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-5x+1}{2x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{2x^3}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1}=1,$$

in quanto le frazioni $\dfrac{5}{x^2}$ e $\dfrac{1}{x^3}$ tendono a 0 quando x tende a $+\infty$.

Da questo semplice esempio possiamo dedurre una regola generale: data una **funzione POLINOMIALE**, per individuare un **infinito** ad essa **equivalente** per $\boldsymbol{x \to \pm\infty}$ è sufficiente considerare il termine di grado maggiore, vale a dire l'**infinito di ORDINE SUPERIORE**.

Avremo pertanto

$$x-4x^5+2 \sim -4x^5 \quad \text{per } x\to\pm\infty,$$

$$\frac{1}{2}x^8-7x+2 \sim \frac{1}{2}x^8 \quad \text{per } x\to\pm\infty,$$

e così via.

Nel calcolo dei limiti con $x \to \pm\infty$ sostituiremo quindi, per semplicità, un fattore di tipo polinomiale con il suo termine di grado più alto.
Tale procedura si applica anche quando il polinomio è elevato a una potenza $\alpha > 0$. Avremo quindi

$$(3x-1)^4 \sim (3x)^4 \quad \text{per } x\to+\infty, \qquad (n^2-5n+2)^2 \sim (n^2)^2=n^4 \quad \text{per } n\to+\infty, \ldots.$$

e analoghe.

B) LOGARITMI CON ARGOMENTO POLINOMIALE

Anche nel caso di logaritmi il cui argomento sia un polinomio, quando la variabile indipendente tende all'infinito si può considerare solo il termine di grado superiore nell'argomento di ciascun logaritmo.
Mostriamo un esempio.
ESEMPIO 1.

Consideriamo, per $x \to +\infty$, la funzione

$$f(x)=\log\left(2x^3-5x+1\right).$$

Possiamo affermare che

$$f(x) = \log(2x^3 - 5x + 1) \ \sim \ \log(2x^3) = g(x) \ \text{ per } x \to +\infty.$$

Per provarlo verificheremo, in base alla definizione di infiniti equivalenti, che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Risulta infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(2x^3 - 5x + 1\right)}{\log(2x^3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left[x^3 \cdot \left(2 - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)\right]}{\log(2 \cdot x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x^3 + \log\left(2 - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{\log 2 + \log x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\log x^3} \cdot \left[1 + \dfrac{\log\left(2 - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{\log x^3}\right]}{\cancel{\log x^3} \cdot \left(\dfrac{\log 2}{\log x^3} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \dfrac{\log\left(2 - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{\log x^3}}{\dfrac{\log 2}{\log x^3} + 1} = 1.$$

Abbiamo quindi provato che $f(x) = \log(2x^3 - 5x + 1)$ e $g(x) = \log(2x^3)$ sono due *infiniti equivalenti* per $x \to +\infty$. Nel calcolo di un limite potremo quindi sostituire (a patto di non creare forme indeterminate) $\log(2x^3 - 5x + 1)$ con $\log(2x^3)$ quando $x \to +\infty$.
In realtà, si potrebbe dire di meglio. Osserviamo innazitutto che

$$\log(2x^3) \ \sim \ \log(x^3) \ \text{ per } x \to +\infty :$$

infatti,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(2x^3)}{\log(x^3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log 2 + \log x^3}{\log x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\log x^3} \cdot \left(\dfrac{\log 2}{\log x^3} + 1\right)}{\cancel{\log x^3}} = 1.$$

Ne segue che

$$\log\left(2x^3 - 5x + 1\right) \ \sim \ \log\left(2x^3\right) \ \sim \ \log\left(x^3\right) \ \text{ per } x \to +\infty,$$

quindi
$$\log\left(2x^3 - 5x + 1\right) \ \sim \ \log\left(x^3\right) \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Da questo esempio deduciamo una regola pratica applicabile **ogniqualvolta NON si generi una forma indeterminata**: un logaritmo il cui argomento sia un polinomio di grado n si comporta come $\log(x^n)$, ovvero $n \log x$ per $x \to +\infty$.
Si avranno quindi le seguenti approssimazioni:

$$\log(x^2 + 5x^8 - 1) \ \sim \ \log\left(x^8\right) = 8 \log x \quad \text{per } x \to +\infty,$$

$$\log(3x - 1) \ \sim \ \log x \quad \text{per } x \to +\infty,$$

$$\log\left(2x^5 + x + 1\right) \ \sim \ \log\left(x^5\right) = 5 \log x \quad \text{per } x \to +\infty,$$

e così via.

Chiaramente, come si diceva sopra, **se si dovesse verificare una forma indeterminata**, tali approssimazioni non sarebbero lecite per stabilire il risultato del limite.

ESEMPIO 2.

Consideriamo il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\log\left(5x^3 + 2\right) - \log\left(x^3\right)\right],$$

che si presenta nella forma indeterminata $[+\infty - \infty]$.

Applichiamo la proprietà dei logaritmi e otteniamo

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\log\left(5x^3 + 2\right) - \log\left(x^3\right)\right] = \lim_{x \to +\infty} \log\left(\frac{5x^3 + 2}{x^3}\right).$$

Poiché $x \to +\infty$, possiamo scrivere

$$5x^3 + 2 \quad \sim \quad 5x^3,$$

da cui

$$\lim_{x \to +\infty} \log\left(\frac{5x^3 + 2}{x^3}\right) = \lim_{x \to +\infty} \log\left(\frac{5x^3}{x^3}\right) = \lim_{x \to +\infty} \log 5 = \log 5.$$

ESEMPIO 3.

Consideriamo, invece, il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(5x^3+2\right)-\log\left(x^7\right)\right],$$

che si presenta anch'esso nella forma indeterminata $[+\infty-\infty]$.

Applicando la solita proprietà dei logaritmi troviamo

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(5x^3+2\right)-\log\left(x^7\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{5x^3+2}{x^7}\right).$$

Poiché

$$5x^3+2 \quad\sim\quad 5x^3 \quad \text{per } x\to+\infty,$$

avremo, per $x\to+\infty$,

$$\log\left(\frac{5x^3+2}{x^7}\right) \quad\sim\quad \log\left(\frac{5x^3}{x^7}\right)=\log\left(\frac{5}{x^4}\right)=\left(\log 5-\log x^4\right)=\left(\log 5-4\log x\right).$$

Ancora, poiché $-4\log x\to-\infty$ mentre $\log 5\to\log 5$, completando l'approssimazione precedente troviamo

$$\log\left(\frac{5x^3+2}{x^7}\right)\quad\sim\quad(\log 5-4\log x)\quad\sim\quad -4\log x \qquad \text{per } x\to+\infty.$$

Tornando al limite originario e inserendo le varie approssimazioni, troviamo

$$\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{5x^3+2}{x^7}\right)=\lim_{x\to+\infty}-4\log x=-\infty.$$

C) FUNZIONI COSTITUITE DA PIÙ ADDENDI DI VARIO TIPO

ESEMPIO 1.

Data la funzione

$$f(x)=x^2-3\log x+e^{2x}-1,$$

verificare che f è infinita per $x\to+\infty$ e trovare un infinito ad essa equivalente.

Si verifica facilmente che f è costituita da più addendi infiniti: infatti, se $x \to +\infty$, risulta $x^2 \to +\infty$, $-3\log x \to -\infty$ ed $e^{2x} = (e^2)^x \to +\infty$, trattandosi di un fattore del tipo a^x con $a = e^2 > 1$ e $x \to +\infty$.
Si chiede di individuare un infinito equivalente a $f(x)$.

Nel caso in cui la funzione sia costituita da più addendi infiniti si segue una regola pratica (di cui controlleremo la validità) che ci consente di individuare un infinito equivalente (il più semplice possibile) alla funzione data.
La regola è la seguente: una **funzione infinita è equivalente** all'**addendo di infinito di ordine superiore**. Nel caso di una funzione polinomiale ci si può limitare a considerare il termine di grado più alto (come abbiamo già avuto modo di constatare); se, invece, la funzione è costituita da addendi di natura differente (potenze, esponenziali, logaritmi), la scala degli infiniti ci consentirà di individuare un infinito equivalente (che potremo quindi sostituire ad f, sempre che non si verifichino forme indeterminate).
Tornando alla funzione assegnata nell'esercizio,

$$f(x) = x^2 - 3\log x + e^{2x} - 1,$$

il termine che per $x \to +\infty$ va all'infinito più rapidamente degli altri è e^{2x}, funzione esponenziale con base strettamente maggiore di 1.
Pertanto potremo affermare che

$$f(x) = x^2 - 3\log x + e^{2x} - 1 \quad \sim \quad e^{2x} \quad \text{se } x \to +\infty.$$

Per VERIFICARE che le due funzioni siano effettivamente equivalenti per $x \to +\infty$, controlliamo che sia soddisfatto il limite della definizione di infiniti equivalenti, ossia

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Si ha innanzitutto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\left(\frac{x^2}{e^{2x}} - \frac{3\log x}{e^{2x}} + 1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{e^{2x}} - \frac{3\log x}{e^{2x}} + 1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1}.$$

Cosideriamo i singoli addendi. Banalmente

$$\frac{1}{e^{2x}} \to 0$$

poiché $e^{2x} \to +\infty$ quando $x \to +\infty$.
Le frazioni $\frac{x^2}{e^{2x}}$, $\frac{3\log x}{e^{2x}}$ tendono entrambe a 0 quando $x \to +\infty$ a causa della gerarchia degli infiniti richiamata poco fa.

Pertanto si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3\log x+e^{2x}-1}{e^{2x}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{e^{2x}}-\frac{3\log x}{e^{2x}}+1-\frac{1}{e^{2x}}\right)=1,$$

cioè $f(x)=x^2-3\log x+e^{2x}-1$ e $g(x)=e^{2x}$ sono due *infiniti equivalenti* per $x\to+\infty$.

La regola pratica che abbiamo dato (quella di considerare il termine che ha infinito di ordine superiore) ci consente effettivamente di individuare un infinito equivalente a una funzione data.

ESEMPIO 2.

Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-4\log x+1}{\log x+7x^2},$$

ricorrendo alle sostituzioni delle funzioni infinite con degli infiniti ad esse equivalenti.

Poiché $x\to+\infty$, risulta $\log x\to+\infty$ e $x^2\to+\infty$. Analizziamo ciascun fattore che costituisce la funzione f, cominciando dal numeratore, vale a dire

$$x-4\log x+1.$$

Grazie alla scala degli infiniti (per la quale x è un infinito di ordine superiore rispetto a $\log x$) avremo

$$x-4\log x+1 \quad\sim\quad x \quad \text{per } x\to+\infty.$$

Per quanto riguarda il denominatore, invece, avremo

$$\log x+7x^2 \quad\sim\quad +7x^2 \quad \text{per } x\to+\infty.$$

Non si sono verificate forme indeterminate.
Possiamo riscrivere il limite iniziale sostituendo ciascun fattore (infinito) col proprio infinito equivalente più semplice. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-4\log x+1}{\log x+7x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{+7x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{7x}=0.$$

ESEMPIO 3.

Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x} - 5\log x + 2}{2^x + \log x - x^3}.$$

Il numeratore,

$$e^{-x} - 5\log x + 2,$$

è formato da tre addendi: e^{-x} NON tende a $+\infty$: si può infatti scrivere $e^{-x} = (e^{-1})^x = \left(\frac{1}{e}\right)^x$, vale a dire una *funzione esponenziale* con base $0 < a < 1$, quindi tendente a 0 se $x \to +\infty$.
Il termine $-5\log x$, invece, tende a $-\infty$. Infine, il termine $+2$ è costante e tende a $+2$.
In definitiva, il numeratore tende a $-\infty$ ed è equivalente, ad esempio, all'UNICO addendo che tende all'infinito, vale a dire $-5\log x$. Cioè

$$e^{-x} - 5\log x + 2 \quad \sim \quad -5\log x \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Il denominatore è formato da tre addendi, tutti tendenti all'infinito. In particolare, 2^x è di tipo esponenziale con base $a = 2 > 1$, quindi tendente a $+\infty$ quando $x \to +\infty$; anche $\log x$ e $-x^3$ sono addendi infiniti per $x \to +\infty$.
Dalla gerarchia degli infiniti, sappiamo che 2^x va all'infinito più velocemente degli altri termini. Pertanto avremo

$$2^x + \log x - x^3 \quad \sim \quad 2^x \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Il limite originario diviene quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x} - 5\log x + 2}{2^x + \log x - x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5\log x}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5\log x}{2^x} = 0^+,$$

poiché, dalla gerarchia degli infiniti, sappiamo che q^x con $q > 1$, è un infinito di ordine superiore rispetto a $\log x$ per $x \to +\infty$.

ESEMPIO 4.

Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3\log x - x^5}{e^x - 1}.$$

A numeratore compaioni tre addendi infiniti: riferendoci alla scala degli infiniti, possiamo subito scartare il termine $-3\log x$ nella individuazione dell'infinito equivalente. Rimangono i termini x^2 e $-x^5$. Poiché, nel caso delle potenze, l'infinito di ordine superiore è dato dal termine elevato a potenza maggiore, avremo

$$x^2 - 3\log x - x^5 \quad \sim \quad -x^5 \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Il denominatore tende a $+\infty$ (perché $x \to +\infty$) e si ha banalmente

$$e^x - 1 \quad \sim \quad e^x \quad \text{se } x \to +\infty.$$

Troviamo quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3\log x - x^5}{e^x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^5}{e^x} = 0^-,$$

poiché e^x è un infinito di ordine superiore rispetto a x^α, $\alpha > 0$.

Non sempre, tuttavia, queste sostituzioni con gli infiniti equivalenti sono lecite. Se si verificano forme indeterminate bisogna agire diversamente.

D) CASO DELLE RADICI QUADRATE

ESEMPIO 1.

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - 5x + 1} - x\right).$$

La funzione è costituita da un unico fattore, vale a dire $\left(\sqrt{x^2 - 5x + 1} - x\right)$.
Il radicando $x^2 - 5x + 1$ è un polinomio. Se procedessimo con l'approssimazione di un polinomio col suo addendo di grado maggiore, troveremmo, per $x \to +\infty$,

$$\left(\sqrt{x^2 - 5x + 1} - x\right) \quad \sim \quad \left(\sqrt{x^2} - x\right) \quad = \quad x - x,$$

vale a dire una FORMA INDETERMINATA.
Potrebbe venire spontaneo affermare che il limite assegnato valga 0 (a causa dell'approssimazione $(x - x)$ appena trovata); ora mostreremo che il limite non vale 0.
Bisogna individuare qualche altra strategia di calcolo che rimandi, a una fase successiva, le approssimazioni dei termini infiniti con degli infiniti equivalenti. In questi casi può essere utile razionalizzare la funzione e riscriverla in altro modo. Risulta

$$\left(\sqrt{x^2 - 5x + 1} - x\right) = \left(\sqrt{x^2 - 5x + 1} - x\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{x^2 - 5x + 1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 - 5x + 1} + x\right)} = \frac{x^2 - 5x + 1 - x^2}{\left(\sqrt{x^2 - 5x + 1} + x\right)} =$$

$$= \frac{-5x+1}{\left(\sqrt{x^2-5x+1}+x\right)}.$$

Precisiamo che non abbiamo ancora approssimato alcun termine: ci siamo solo limitati a scrivere diversamente la funzione.
Applichiamo le sostituzioni con gli infiniti equivalenti sia a numeratore che a denominatore.
Per il numeratore si ha banalmente

$$-5x+1 \quad \sim \quad -5x \quad \text{per } x \to +\infty.$$

A denominatore si ha

$$\left(\sqrt{x^2-5x+1}+x\right) \quad \sim \quad \left(\sqrt{x^2}+x\right) \quad = \quad x+x=2x \quad \text{per } x \to +\infty.$$

NON si è creata una forma indeterminata, quindi l'approssimazione del radicando (x^2-5x+1) con x^2 è lecita.
Possiamo ora calcolare il limite iniziale. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+1}{\sqrt{x^2-5x+1}+x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}.$$

Come anticipato prima, il limite non risulta 0.

ESEMPIO 2.

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x+3}+3x}{\log(-x)-e^{2x}+4x}.$$

La funzione è costituita da due fattori, uno a numeratore e uno a denominatore.

Analizziamo il comportamento del numeratore,

$$\sqrt{x^2-2x+3}+3x \quad \text{quando} \quad x \to -\infty.$$

Poiché il radicando è un polinomio, cominceremo ad approssimarlo considerando l'addendo di grado superiore. Ricordando che

$$\sqrt{x^2} = |x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e considerato che l'ipotesi $x \to -\infty$ implica $x < 0$ da cui $|x| = -x$, si trova

$$\sqrt{x^2 - 2x + 3} + 3x \;\sim\; \sqrt{x^2} + 3x \;=\; |x| + 3x \;=\; -x + 3x = 2x \quad \text{per } x \to -\infty.$$

L'approssimazione del radicando con l'infinito equivalente NON ha portato a una forma indeterminata: la sostituzione è quindi lecita.

Consideriamo il denominatore della frazione: solo due addendi sono infiniti, $\log(-x)$ e $5x$. Notiamo infatti che $e^{2x} = (e^2)^x$ è una funzione esponenziale con base $a > 1$ che tende a 0 quando la variabile indipendente tende a $-\infty$. Il logaritmo ha perfettamente senso in quanto il suo argomento è $-x$. Posto $y = -x$, si ha immediatamente $y \to +\infty$ e

$$\lim_{x \to -\infty} \log(-x) = \lim_{y \to +\infty} \log y = +\infty.$$

A parte il termine infinitesimo e^{2x}, tra i due addendi rimanenti quello che va all'infinito più velocemente è $4x$.
Pertanto avremo

$$\log(-x) - e^{-2x} + 4x \quad \sim \quad 4x \;\; \text{quando } x \to -\infty.$$

Possiamo quindi calcolare il limite sostituendo a ciascun fattore il proprio infinito equivalente ricavato. Risulta

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3} + 3x}{\log(-x) - e^{2x} + 4x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}.$$

ESERCIZI VARI

1) Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-4x+3)\cdot\left[\log\left(x^2+3\right)-\log x^2\right].$$

Svolgimento.

La funzione è costituita da due fattori.
Cerchiamo di analizzare il comportamento di ciascun fattore per poterlo sostituire con un infinitesimo o un infinito ad esso equivalente al fine di semplificare la struttura del limite.
Poiché $x\to+\infty$, il fattore polinomiale (x^2-4x+3) si comporta come il suo addendo di grado maggiore, vale a dire x^2; cioè

$$x^2-4x+3 \;\sim\; x^2 \quad \text{per } x\to+\infty.$$

Nel limite sostituiremo quindi il fattore x^2-4x+3 con x^2.

Consideriamo il secondo fattore, vale a dire $[\log(x^2+3)-\log x^2]$.
Se procedessimo con le approssimazioni degli argomenti dei logaritmi avremmo

$$\left[\log\left(x^2+3\right)-\log x^2\right] \;\sim\; \log(x^2)-\log(x^2),$$

vale a dire una forma indeterminata.
Bisogna cambiare tecnica. In questi casi può essere utile applicare la proprietà dei logaritmi per cui la differenza di due logaritmi è uguale al logaritmo del quoziente dei due argomenti originari. Si avrà quindi

$$\left[\log\left(x^2+3\right)-\log x^2\right]=\log\left(\frac{x^2+3}{x^2}\right)=\log\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)=\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right).$$

Poiché $x\to+\infty$, si avrà

$$y=\frac{3}{x^2}\to 0.$$

Ricordando che

$$\log(1+y) \;\sim\; y \quad \text{per } y\to 0,$$

potremo scrivere, nel nostro caso,

$$\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right) \;\sim\; \frac{3}{x^2} \quad \text{per } x\to+\infty.$$

Riscriveremo quindi al posto del fattore $[\log(x^2+3)-\log x^2]$ l'infinitesimo ad esso equivalente

$\frac{3}{x^2}$.

Tornando al limite originario, troviamo

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-4x+3\right)\cdot\left[\log\left(x^2+3\right)-\log x^2\right]=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}3=3.$$

2) **[T.E. 22/01/2007]**

Si calcoli il valore del limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\cdot\left(n^{\frac{3}{n}}-1\right)}{\log\left(n^{2n}+2n!\right)}.$$

Svolgimento.

Consideriamo i vari fattori.
Il primo fattore, n^2, si presenta già in forma favorevole (e, ovviamente, tende all'infinito).

Per quanto riguarda il secondo fattore,

$$n^{\frac{3}{n}}-1,$$

ci accorgiamo della presenza di un addendo in cui compare la n sia alla base che all'esponente: come già precisato in aula, conviene in questo caso tener presente la ben nota uguaglianza

$$y=e^{\log y},\quad \text{per ogni } y>0.$$

Applichiamola con $y=n^{\frac{3}{n}}$: si ha

$$n^{\frac{3}{n}}=e^{\log n^{\frac{3}{n}}}=e^{\frac{3}{n}\log n}.$$

Pertanto

$$\left(n^{\frac{3}{n}}-1\right)=\left(e^{\frac{3}{n}\log n}-1\right)=\left(e^{\frac{3\log n}{n}}-1\right).$$

Poiché, dalla gerarchia degli infiniti, sappiamo che n è un infinito di ordine superiore rispetto a $\log n$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3\log n}{n}=0.$$

Pertanto il fattore $\left(e^{\frac{3\log n}{n}}-1\right)$ tende a $(e^0-1)=0$. Si tratta di un fattore *infinitesimo* per $n\to+\infty$.
Cerchiamo di approssimare tale fattore con un infinitesiono ad esso equivalente.
La struttura del fattore fa pensare immediatamente all'approssimazione

$$e^y-1 \quad \sim \quad y \text{ quando } y\to 0.$$

Effettivamente siamo nelle condizioni per poter ricorrere a tale approssimazione. Posto infatti

$$y=\frac{3\log n}{n},$$

si ha, per quanto osservato in precedenza,

$$y=\frac{3\log n}{n}\to 0 \quad \text{per } n\to+\infty.$$

Possiamo quindi procedere con l'approssimazione e scrivere

$$\left(e^{\frac{3\log n}{n}}-1\right) \quad \sim \quad \frac{3\log n}{n} \quad \text{per } n\to+\infty.$$

Quando riscriveremo il limite, sostituiremo al fattore $\left(e^{\frac{3\log n}{n}}-1\right)$ l'infinitesimo equivalente $\dfrac{3\log n}{n}$.
Il terzo e ultimo fattore,

$$\log(n^{2n}+2n!)$$

tende all'infinito. Quando l'argomento di un logaritmo è la somma di più addendi che tendono all'infinito, abbiamo visto che è possibile considerare solamente il termine che ha infinito di ordine superiore rispetto agli altri e trascurare gli infiniti di ordine inferiore (oltre che i termini finiti), a patto di non generare delle forme indeterminate.
Poiché n^{2n} è un infinito di ordine superiore rispetto a $n!$, ne segue che possiamo riscrivere

$$\log(n^{2n}+2n!) \quad \sim \quad \log(n^{2n})=2n\cdot\log n \quad \text{per } n\to+\infty.$$

Possiamo riscrivere il limite originario sostituendo ai vari fattori i rispettivi infinitesimi/infiniti equivalenti. Si trova

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\cdot\left(e^{\frac{3}{n}\log n}-1\right)}{\log(n^{2n}+2n!)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\cdot\frac{3\log n}{n}}{2n\cdot\log n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

3) **[T.E. 26/01/2009]**

Si calcoli il valore del limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n + 7n\log n + n\sin n}{(n+2)^n + n\log\frac{1}{n} + n\sin\frac{1}{n}}.$$

Svolgimento.

Consideriamo i vari fattori.

Cominciamo dal *fattore* a numeratore,

$$n^n + 7n\log n + n\sin n.$$

Stabiliamo a cosa tende ogni *addendo*:

- l'addendo n^n tende all'infinito (come è ben noto);
- l'addendo $7n\log n$ tende all'infinito, perché prodotto di successioni infinite;
- per quanto riguarda $n\sin n$, anzitutto ricordiamo che NON ESISTE

  $$\lim_{n\to+\infty} \sin n;$$

  sappiamo solo che il seno è una funzione LIMITATA oscillante tra i valori -1 e 1.
  Il fattore n che moltiplica il seno tende all'infinito; pertanto, nell'insieme, non esiste il limite

  $$\lim_{n\to+\infty} n\sin n.$$

D'altra parte ciò che a noi interessa è individuare, all'interno del fattore, l'infinito di ordine superiore per poterlo sostituire all'intero fattore: nel nostro caso si tratta di n^n. Sappiamo dalla gerarchia degli infiniti che n^n è un infinito di ordine superiore delle successioni che lo precedono; si può verificare facilmente che n^n è un anche infinito di ordine superiore a $7n \cdot \log n$ (che è il *prodotto* di due successioni che precedono n^n nella scala degli infiniti).

Inoltre, n^n è pure infinito di ordine superiore rispetto a $n\sin n$, cioè

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin n}{n^n} = 0.$$

Infatti, essendo

$$-1 \le \sin n \le 1,$$

segue immediatamente che

$$-\frac{n}{n^n} \leq \frac{n \sin n}{n^n} \leq \frac{n}{n^n},$$

e quindi, poiché la prima e l'ultima successione della disuguaglianza tendono a 0 per $n \to \infty$, pure la successione centrale tende a 0 (per il Teorema del Confronto).
Quindi l'addendo

$$n^n$$

è effettivamente l'infinito di ordine superiore del primo fattore, quindi un infinito equivalente al fattore stesso.
Quindi scriveremo

$$n^n + 7n \log n + n \sin n \quad \sim \quad n^n \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Consideriamo ora il secondo e ultimo *fattore*, vale a dire il denominatore

$$\left[(n+2)^n + n \log \frac{1}{n} + n \sin \frac{1}{n}\right].$$

Vediamo il comportamento di ogni addendo.

- Si ha $(n+2)^n \to +\infty$ per $n \to +\infty$.
- L'addendo
$$n \log \frac{1}{n} = n \log(n)^{-1} = n \cdot (-1) \cdot \log n = -n \log n,$$
tende a $-\infty$.
- L'addendo
$$n \sin \frac{1}{n} = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1 \quad \text{se } n \to +\infty,$$
a causa del limite notevole
$$\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$
utilizzato ponendo $y = \dfrac{1}{n}$.

Pertanto, nel secondo fattore, vi è la presenza di due addendi infiniti per $n \to +\infty$ e di un addendo che tende a un numero finito.

Siamo quindi interessati a individuare l'infinito di ordine superiore, vale a dire

$$(n+2)^n.$$

Pertanto possiamo riscrivere il limite iniziale come

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+2)^n},$$

ossia

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right\}^{-1}.$$

A questo punto vogliamo utilizzare il limite notevole

$$\lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e,$$

essendo nel nostro caso

$$t = \frac{2}{n} \to 0 \;\text{ per } n \to +\infty.$$

Per il teorema di sostituzione, occorre avere all'esponente l'inverso di t, vale a dire l'inverso di

$$\frac{2}{n},$$

cioè

$$\frac{n}{2}.$$

Per fare ciò dividiamo e moltiplichiamo per 2 (in quanto il fattore n è già presente).
Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}^{-1\cdot 2} = e^{-2}$$

(risultato ottenuto utilizzando il limite notevole richiamato e il teorema di sostituzione).

4) Si calcoli il valore del limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\tan(3x)}.$$

Svolgimento.

Poiché

$$e^{-2x} = \frac{1}{e^{2x}},$$

possiamo riscrivere il limite come

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - \dfrac{1}{e^{2x}}}{\tan(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{e^{4x}-1}{e^{2x}}}{\tan(3x)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x}-1}{e^{2x}\tan(3x)}.$$

Osserviamo anzitutto che

$$e^{2x} \to 1 \qquad \text{quando} \;\; x \to 0.$$

Possiamo pertanto riscrive il limite come

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x}-1}{\tan(3x)},$$

che si presenta nella forma indeterminata $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Analizziamo i singoli fattori.
Cominciamo col fattore

$$e^{4x} - 1.$$

Poiché per $x \to 0$ si ha $4x \to 0$ e poiché la funzione esponenziale è continua in 0, si ha che

$$e^{4x} - 1 \to e^{0} - 1 = 0.$$

Il fattore è quindi infinitesimo.
Cercheremo di sostituirlo con un infinitesimo ad esso equivalente.
Poiché

$$e^{y} - 1 \quad \sim \quad y \;\; \text{se } y \to 0,$$

posto $y = 4x$, si ha chiaramente $y \to 0$ e, per il teorema di sostituzione,

$$e^{4x} - 1 \quad \sim \quad 4x \;\; \text{per } x \to 0.$$

Sostituiremo quindi $e^{4x} - 1$ con l'infinitesimo equivalente $4x$.

Il secondo fattore,

$$\tan 3x$$

è anch'esso infinitesimo poiché $3x \to 0$ e $\tan 0 = 0$.
Grazie all'approssimazione

$$\tan y \quad \sim \quad y \quad \text{per } y \to 0,$$

avremo, posto $y = 3x \to 0$,

$$\tan 3x \quad \sim \quad 3x \quad \text{per } x \to 0.$$

Tornando al limite originario e sostituendo a ciascun infinitesimo l'infinitesimo ad esso equivalente dedotto dai limiti notevoli, troviamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x} - 1}{\tan 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}.$$

5) **[T.E. 11/01/2010]**
Si calcoli il valore del limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!(n+1)^n \sin\left(\dfrac{7n}{(n+1)!}\right)}{2^n + (n+2)^n}.$$

Svolgimento.

Consideriamo i vari fattori.

Il numeratore è dato dal prodotto di tre fattori: $n!$ ed $(n+1)^n$ si presentano già in forma favorevole.
Il fattore

$$\sin\left(\frac{7n}{(n+1)!}\right)$$

è infinitesimo (cioè tende a 0) per n tendente all'infinito.
Infatti, ricordando la scala delle successioni notevoli, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{7n}{(n+1)!} = 0,$$

e di conseguenza, per il teorema di sostituzione,

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{7n}{(n+1)!}\right) = 0.$$

Trattandosi di un fattore infinitesimo, cercheremo di sostituirlo con un infinitesimo ad esso equivalente per $n \to +\infty$.
Poiché

$$\sin y \quad \sim \quad y \quad \text{per } y \to 0,$$

posto $y = \dfrac{7n}{(n+1)!}$ (che, come osservato sopratende a 0 quando $n \to +\infty$) otteniamo, per il teorema di sostituzione,

$$\sin\left(\frac{7n}{(n+1)!}\right) \quad \sim \quad \left(\frac{7n}{(n+1)!}\right) \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Infine, il fattore a denominatore,

$$2^n + (n+2)^n$$

consta di due addendi che tendono entrambi a $+\infty$.
Poiché $(n+2)^n$ è l'infinito di ordine superiore, avremo che

$$2^n + (n+2)^n \quad \sim \quad (n+2)^n \quad \text{per } n \to +\infty.$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE: Sarebbe un errore proseguire con l'approssimazione e scrivere $(n+2)^n \quad \sim \quad n^n \quad \text{per} \quad n \to +\infty$.
Infatti, sostenere che n^n sia un infinito equivalente a $(n+2)^n$ significherebbe affermare che il risultato del limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)^n}{n^n}$$

sia uguale a 1 (a causa della definizione di infiniti equivalenti).
In realtà il precedente limite NON risulta uguale a 1. Si ha infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)^n}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}^2 = e^2 \neq 1.$$

Pertanto è FALSO affermare che $(n+2)^n$ e n^n siano infiniti equivalenti (e quindi è sbagliato sostituire $(n+2)^n$ con n^n nel calcolo del limite).
Terremo l'intero fattore $(n+2)^n$.

Fatte queste premesse, possiamo riscrivere il limite come

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!(n+1)^n \cdot \sin\left(\frac{7n}{(n+1)!}\right)}{2^n + (n+2)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! \cdot (n+1)^n \cdot \frac{7n}{(n+1)!}}{(n+2)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! \cdot (n+1)^n \cdot 7n}{(n+1)! \cdot (n+2)^n}.$$

Ricordiamo che

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!,$$

pertanto si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!(n+1)^n \cdot 7n}{(n+1) \cdot n! \cdot (n+2)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n \cdot 7n}{(n+1) \cdot (n+2)^n}.$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{7n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7n}{n} = 7,$$

possiamo riscrivere il limite come

$$7 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{(n+2)^n} = 7 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n.$$

Poiché

$$(n+1) \quad \sim \quad n, \qquad (n+2) \quad \sim \quad n \quad \text{per} \quad n \to +\infty,$$

si ha

$$\frac{n+1}{n+2} \to \frac{n}{n} = 1 \qquad \text{per } n \to +\infty;$$

siamo quindi in presenza di una forma indeterminata del tipo $[1^\infty]$ che ci suggerisce di far riferimento a uno dei due limiti notevoli

$$\lim_{y\to\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

Consideriamo, ad esempio, il secondo.

Dobbiamo quindi cercare di riscrivere

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

nella forma

$$(1+y) \quad \text{con } y \to 0.$$

Per fare ciò, cerchiamo di far comparire a numeratore la stessa espressione che compare a denominatore, vale a dire $n+2$. Procediamo aggiungiendo e togliendo 2 nel seguente modo:

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \left(\frac{n+2-2+1}{n+2}\right) = \left(\frac{n+2-1}{n+2}\right) = \left(\frac{n+2}{n+2} + \frac{-1}{n+2}\right) = \left(1 + \frac{-1}{n+2}\right),$$

ottenendo quanto desiderato.

Pertanto si ha

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \left(1 + \frac{-1}{n+2}\right)^n.$$

La struttura è proprio quella del limite notevole

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}},$$

essendo nel nostro caso $y = \dfrac{-1}{n+2}$.
In forza del teorema di sostituzione, occorre dunque moltiplicare (e dividere) l'esponente della tonda per il reciproco di y, cioè

$$-\frac{n+2}{1} = -(n+2).$$

Si perviene dunque al limite

$$7 \cdot \lim_{n\to+\infty} \left\{ \left(1 + \frac{-1}{n+2}\right)^{-(n+2)} \right\}^{-\frac{1}{n+2}\cdot n} = 7 \cdot \lim_{n\to+\infty} \left\{ \left(1 + \frac{-1}{n+2}\right)^{-(n+2)} \right\}^{-\frac{n}{n+2}} = 7 \cdot e^{-1},$$

per il teorema di sostitutione ed essendo inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-n}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n}{n} = -1.$$

6) **[T.E. 29/01/2010]**

Si calcoli il valore del limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{n}\left[\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right]}{\sqrt{\log\left(1+\frac{7}{n^3}\right)+n}-\sqrt{n}}.$$

Svolgimento.

La successione è composta da tre fattori.

Il fattore

$$\sqrt[4]{n} = n^{1/4} \to +\infty,$$

trattandosi di una potenza del tipo n^α con $\alpha > 0$.
Osservando il secondo fattore

$$\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1,$$

ci si accorge immediatamente che, poiché $y = \dfrac{1}{n^2} \to 0$ per $n \to +\infty$, che conviene ricondursi al limite fondamentale

$$\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} = \frac{1}{2},$$

dal quale segue l'approssimazione

$$1 - \cos y \quad \sim \quad \frac{1}{2}y^2 \;\; \text{quando } y \to 0.$$

Raccogliamo un segno meno e troviamo

$$\left[\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right] = -\left[1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \;\sim\; -\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}\right)^2\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\cdot n^4} \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Consideriamo il fattore

$$\sqrt{\log\left(1+\frac{7}{n^3}\right)+n}-\sqrt{n},$$

nel quale compare la sottrazione di due radici quadrate.

Osservando il primo radicando,

$$\log\left(1+\frac{7}{n^3}\right)+n,$$

poiché $\frac{7}{n^3} \to 0$ per $n \to +\infty$, il termine $\log\left(1+\frac{7}{n^3}\right)$ tende a $\log 1 = 0$.
Ne segue che solo l'addendo n tende a $+\infty$.
Pertanto, in prima approssimazione, avremmo

$$\log\left(1+\frac{7}{n^3}\right)+n \quad \sim \quad n \ \text{ per } n \to +\infty.$$

Tuttavia, seguendo questa prima approssimazione, si otterrebbe, per l'intero fattore,

$$\sqrt{\log\left(1+\frac{7}{n^3}\right)+n}-\sqrt{n} \quad \sim \quad \sqrt{n}-\sqrt{n} \ \text{ per } n \to +\infty,$$

vale a dire una FORMA INDETERMINATA.
Per individuare l'andamento del fattore è quindi necessario procedere con la razionalizzazione. Si trova

$$\sqrt{\log\left(1+\frac{7}{n^3}\right)+n}-\sqrt{n} = \sqrt{\log\left(1+\frac{7}{n^3}\right)+n}-\sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{\log\left(1+\frac{7}{n^3}\right)+n}+\sqrt{n}}{\sqrt{\log\left(1+\frac{7}{n^3}\right)+n}+\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{\log\left(1+\frac{7}{n^3}\right)}{\sqrt{\log\left(1+\frac{7}{n^3}\right)+n}+\sqrt{n}}.$$

A questo punto risulta possibile studiare l'andamento dei singoli fattori e individuare degli infiniti o infinitesimi ad essi equivalenti.
Il numeratore è infinitesimo poiché $\frac{7}{n^3} \to 0$ per $n \to +\infty$. Pensando all'approssimazione

$$\log(1+y) \quad \sim \quad y \ \text{ per } y \to 0,$$

si ha, posto $y = \frac{7}{n^3}$,

$$\log\left(1+\frac{7}{n^3}\right) \quad \sim \quad \frac{7}{n^3} \ \text{ per } n \to +\infty.$$

Al denominatore non si verifica più la forma indeterminata. Risulta infatti

$$\sqrt{\log\left(1+\frac{7}{n^3}\right)+n+\sqrt{n}} \quad \sim \quad \sqrt{n}+\sqrt{n}=2\cdot\sqrt{n}.$$

In definitiva abbiamo

$$\sqrt{\log\left(1+\frac{7}{n^3}\right)+n}-\sqrt{n} = \frac{\log\left(1+\frac{7}{n^3}\right)}{\sqrt{\log\left(1+\frac{7}{n^3}\right)+n}+\sqrt{n}} \sim \frac{\frac{7}{n^3}}{2\cdot\sqrt{n}} = \frac{7}{2n^3\cdot\sqrt{n}} \quad \text{per } n\to+\infty.$$

A questo punto possiamo riscrivere il limite iniziale sostituendo a ciascun termine il proprio infinitesimo o infinito equivalente. Troviamo

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{n}\cdot\left[\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right]}{\sqrt{\log\left(1+\frac{7}{n^3}\right)+n}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{1/4}\cdot\left(-\frac{1}{2n^4}\right)}{\frac{7}{2n^3\cdot\sqrt{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} -\frac{n^{1/4}\cdot n^{1/2}\cdot n^3}{14\cdot n^4} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{14}\cdot\frac{n^{3/4}}{n} = 0,$$

in quanto l'infinito a denominatore è di ordine superiore rispetto all'infinito a numeratore.

7) **[T.E. 03/09/2009]**

Si calcoli il valore del limite

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)\cdot\left[n-\sqrt{n^2+7}\right]}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Svolgimento.

Cominciamo con l'osservare che la successione

$$(-1)^n=\begin{cases}1 & \text{se } n \text{ è pari}\\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari}\end{cases}$$

non ammette limite per $n\to\infty$. Tuttavia è limitata tra -1 e 1.

Per stabilire il risultato dell'intero limite dobbiamo calcolare a cosa tenda il resto della successione.

Studiamo quindi il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)\cdot\left[n-\sqrt{n^2+7}\right]}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)},$$

procedendo come negli esercizi precedenti.

Il fattore

$$\sin\left(\frac{3}{n}\right)$$

è infinitesimo, essendo

$$\left(\frac{3}{n}\right) \ \to\ 0 \ \text{ per } n\to+\infty.$$

Poiché

$$\sin y \quad\sim\quad y \ \text{ quando } y\to 0,$$

si ha, posto $y=\left(\frac{3}{n}\right)\to 0$,

$$\sin\left(\frac{3}{n}\right) \quad\sim\quad \left(\frac{3}{n}\right) \ \text{ per } n\to+\infty.$$

Analogo discorso per il fattore

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Grazie al limite fondamentale, si ha

$$\log(1+y) \quad\sim\quad y \ \text{ per } y\to 0,$$

da cui, posto $y=\frac{1}{n}$,

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad\sim\quad \frac{1}{n} \ \text{ per } n\to+\infty.$$

Consideriamo infine il fattore

$$n-\sqrt{n^2+7}.$$

Approssimando il radicando (infinito) con n^2 troveremmo

$$n-\sqrt{n^2+7}\ \sim\ n-\sqrt{n^2}=n-n,$$

vale a dire un forma indeterminata. Procediamo con la razionalizzazione. Si ha

$$n-\sqrt{n^2+7}\ =\ n-\sqrt{n^2+7}\cdot\frac{n+\sqrt{n^2+7}}{n+\sqrt{n^2+7}}=\frac{-7}{n+\sqrt{n^2+7}}.$$

Approssimando, troviamo

$$n-\sqrt{n^2+7}=\frac{-7}{n+\sqrt{n^2+7}}\sim\frac{-7}{n+\sqrt{n^2}}=\frac{-7}{2n}\quad\text{per } n\to+\infty.$$

Possiamo ora riscrivere il limite di partenza sostituendo a ciascun fattore un fattore ad esso equivalente per $n\to+\infty$.
Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)\cdot\left[n-\sqrt{n^2+7}\right]}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3}{n}\cdot\frac{-7}{2n}}{\frac{1}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{-21}{2n}=0,$$

la successione è quindi infinitesima.
Ne segue che

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)\cdot\left[n-\sqrt{n^2+7}\right]}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}=0,$$

poiché la successione limitata $(-1)^n$ risulta moltiplicata per una successione infinitesima.

8) Si calcoli il valore del limite

$$\lim_{x\to0^+}x^{\frac{\log(2-\cos x)}{\sin x}}.$$

Svolgimento.

La presenza dell'incognita x sia alla base sia all'esponente ci suggerisce di ricorrere alla ben nota uguaglianza

$$y = e^{\log y}, \quad \text{per ogni } y > 0.$$

Riscriviamo quindi il limite come

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\log x^{\frac{\log(2-\cos x)}{\sin x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\log(2-\cos x)}{\sin x}\cdot \log x} =$$

$$= e^{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(2-\cos x)}{\sin x}\cdot \log x},$$

dove l'ultima uguaglianza è lecita grazie al teorema di sostituzione.

Preoccupiamoci quindi di calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(2-\cos x)}{\sin x}\cdot \log x.$$

Il fattore $\sin x$, tendente a 0, lo trattiamo col solito limite notevole, scrivendo

$$\sin x \;\sim\; x \;\text{ per } x \to 0.$$

Considerando invece il fattore

$$\log(2-\cos x),$$

ci accorgiamo che, al tendere di x a 0, il fattore tende a $\log(1) = 0$. Si tratta cioè di un fattore infinitesimo.

Come osservato a lezione, in questi casi si cerca di ricondursi al limite notevole

$$\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1,$$

e alla conseguente approssimazione

$$\log(1+y) \;\sim\; y \;\text{ per } y \to 0.$$

Osserviamo che, nel precedente limite fondamentale, l'argomento del logaritmo tende a 1 come nel nostro esercizio.

Cerchiamo quindi di scrivere

$$\log(2-\cos x)$$

nella forma

$$\log(1+y),$$

con $y \to 0$.

Si ha

$$\log(2-\cos x) = \log(1+1-\cos x) = \log\left[1+(1-\cos x)\right].$$

dove $y = (1-\cos x) \to 0$ quando $x \to 0$.
Possiamo quindi scrivere

$$\log(2-\cos x) = \log\left[1+(1-\cos x)\right] \ \sim \ (1-\cos x) \quad \text{per } x \to 0.$$

Ancora, poiché

$$(1-\cos x) \ \sim \ \frac{1}{2}x^2 \ \text{ per } x \to 0,$$

possiamo proseguire con l'approssimazione e scrivere

$$\log(2-\cos x) = \log\left[1+(1-\cos x)\right] \ \sim \ (1-\cos x) \ \sim \ \frac{1}{2}x^2 \quad \text{per } x \to 0.$$

In definitiva troviamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(2-\cos x)}{\sin x} \cdot \log x = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} \cdot \log x = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot x \cdot \log x = 0,$$

a causa del limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \cdot (\log x)^\beta = 0 \ \text{ per ogni } \alpha, \beta > 0.$$

Tornando al limite originario si trova, dal teorema di sostituzione,

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\log x^{\frac{\log(2-\cos x)}{\sin x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\log(2-\cos x)}{\sin x} \cdot \log x} = e^0 = 1.$$

9) Si calcoli il valore del limite

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}-x\right).$$

Svolgimento.

Se considerassimo solamente l'infinito maggiore sotto radice cubica, ossia x^3, otterremmo una forma indeterminata $\sqrt[3]{x^3}(=x)-x$.

Pertanto bisogna procedere in altro modo, cercando di far scomparire la radice cubica.
Per fare ciò, la tipica razionalizzazione che coinvolge la differenza di due quadrati non è efficace, in quanto la radice terza rimane elevando al quadrato.
Bisogna quindi cercare di rifarsi alla differenza di due cubi.
Ricordiamo che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ risulta

$$(a-b)(a^2+b^2+ab)=a^3-b^3.$$

Cerchiamo di applicarla al nostro esercizio, essendo

$$a=\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}, \qquad b=x.$$

Moltiplichiamo sia numeratore sia denominatore per il fattore mancante della scomposizione: si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}-x\right)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}\right)^2+x^2+x\cdot\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}\right)}{\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}\right)^2+x^2+x\cdot\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}}.$$

Per la scomposizione richiamata poco fa, si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^3-2x^2+1-x^3)}{\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}\right)^2+x^2+x\cdot\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(-2x^2+1)}{\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}\right)^2+x^2+x\cdot\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}},$$

che si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Poiché $x \to -\infty$ e compaiono termini di tipo polinomiale, approssimiamo ciascun termine con l'addendo di infinito di ordine superiore.
Si hanno le seguenti approssimazioni:

$$-2x^2+1 \ \sim \ -2x^2 \quad \text{per } x \to -\infty,$$

$$\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}\right)^2 \ \sim \ \left(\sqrt[3]{x^3}\right)^2 = x^2 \quad \text{per } x \to -\infty,$$

$$x \cdot \sqrt[3]{x^3-2x^2+1} \ \sim \ x \cdot \sqrt[3]{x^3} = x^2 \quad \text{per } x \to -\infty.$$

Risulta quindi

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(-2x^2+1)}{\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}\right)^2 + x^2 + x\cdot\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^2}{x^2+x^2+x^2} = -\frac{2}{3}.$$

10) Si discuta, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il valore del limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n! + \arctan n}{n^\alpha[(n-2)!]\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)}.$$

Svolgimento.

Consideriamo i vari fattori.

Il primo fattore, vale a dire il numeratore, consta di due addendi: $n!$ e $\arctan n$.
Poiché $n! \to +\infty$ e $\arctan n \to \dfrac{\pi}{2}$, avremo

$$n! + \arctan n \ \sim \ n! \quad \text{per } n \to +\infty.$$

I primi due fattori del denominatore, n^α ed $(n-2)!$, si presentano già in forma favorevole.

Il fattore $\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$, invece, lo trattiamo col solito limite notevole

$$\lim_{y\to0} \frac{1-\cos y}{y^2} = \frac{1}{2}$$

e la conseguente approssimazione

$$1-\cos y \ \sim \ \frac{1}{2}y^2 \quad \text{per } y \to 0.$$

In particolare, osservato che $y = \dfrac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$, si avrà

$$\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) \quad \sim \quad \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2n^2} \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Risulta quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n! + \arctan n}{n^\alpha [(n-2)!]\left(1 - \cos\dfrac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^\alpha \cdot (n-2)! \cdot \dfrac{1}{2n^2}}$$

$$= 2 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)! \cdot n^2}{n^\alpha (n-2)!} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(n-1)}{n^\alpha} =$$

$$= 2 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4 - n^3}{n^\alpha} = 2 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{n^\alpha}.$$

Pertanto si presentano le seguenti eventualità:

- se $\alpha = 4$, il limite vale 2;
- se $\alpha < 4$, il limite vale $+\infty$;
- se $\alpha > 4$, il limite vale 0.

11) **[T.E. 23/03/2004]**

Sia $\beta \in \mathbb{R}$.
Si discuta, al variare del parametro β, il valore del limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n+\beta\log n} + 3}{e^{n+7} + n^3} \sin\frac{2}{n^2}.$$

Svolgimento.

Applicando la proprietà delle potenze riscriviamo il limite come

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n \cdot e^{\beta\log n} + 3}{e^n \cdot e^7 + n^3} \sin\frac{2}{n^2}.$$

Ricordando la proprietà dei logaritmi

$$m\log x = \log x^m, \quad \text{per ogni } x > 0 \ \text{ e } \ \text{per ogni } \ m \in \mathbb{R},$$

e che
$$e^{\log x} = x \quad \text{per ogni} \quad x > 0,$$

si ha
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n \cdot e^{\log n^\beta} + 3}{e^n \cdot e^7 + n^3} \sin\frac{2}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n \cdot n^\beta + 3}{e^n \cdot e^7 + n^3} \sin\frac{2}{n^2}.$$

Cerchiamo di stabilire il comportamento di ogni fattore.

Cominciamo col considerare il fattore
$$e^n \cdot n^\beta + 3.$$

È ben noto che, per $n \to +\infty$,

- $n^\beta \to +\infty$ quando $\beta > 0$
- $n^\beta = 1$ quando $\beta = 0$
- $n^\beta \to 0$ quando $\beta < 0$.

Tuttavia, indipendentemente da questa casistica, si ha
$$e^n \cdot n^\beta \to +\infty, \quad \text{per ogni } \beta \in \mathbb{R}.$$

Infatti si ha:
$$\text{se } \beta > 0, \quad \lim_{n\to\infty} e^n \cdot n^\beta = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty,$$

$$\text{se } \beta < 0, \quad \lim_{n\to\infty} e^n \cdot n^\beta = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^{-\beta}} \to +\infty,$$
(osserviamo che, essendo $\beta < 0$, si ha $-\beta > 0$, quindi $n^{-\beta} \to +\infty$.

Ricordando la scala degli infiniti, si ha che il limite tende a $+\infty$.)

$$\text{se } \beta = 0, \quad \lim_{n\to\infty} e^n \cdot n^\beta = \lim_{n\to\infty} e^n \cdot 1 \to +\infty.$$

Quindi, nel primo fattore
$$e^n \cdot n^\beta + 3$$

teniamo solo il primo addendo, ossia

$$e^n \cdot n^\beta,$$

che tende all'infinito (il secondo addendo, 3, è una quantità finita).

Considerando invece il fattore

$$e^n \cdot e^7 + n^3,$$

somma di due infiniti, come sempre, teniamo l'addendo di infinito maggiore, cioè $e^n \cdot e^7$. Pertanto scriveremo

$$e^n \cdot e^7 + n^3 \quad \sim \quad e^n \cdot e^7 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Infine, il terzo fattore

$$\sin \frac{2}{n^2},$$

lo trattiamo col limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

In particolare, posto $x = \dfrac{2}{n^2} \to 0$ per $n \to +\infty$, avremo

$$\sin \frac{2}{n^2} \quad \sim \quad \frac{2}{n^2} \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Quindi si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^n \cdot n^\beta}{e^n \cdot e^7 + n^3} \cdot \sin \frac{2}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{e^n \cdot n^\beta}{e^n \cdot e^7} \cdot \frac{2}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{e^7} \cdot \frac{n^\beta}{n^2}.$$

Procediamo con la discussione:

- se $\beta = 2$ il limite risulta $\dfrac{2}{e^7}$;
- se $\beta > 2$ il limite risulta $+\infty$;
- se $\beta < 2$ il limite risulta 0.

12) **[T.E. 01/09/2011]**

Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)!\left(e^{\frac{1}{3(n-1)!}}-1\right)}{\sqrt{\frac{n^6}{4}+7n^4+\log^2(n+1)}}.$$

Svolgimento.

Analizziamo i vari fattori.

Il fattore

$$(n+2)!$$

tende ovviamente all'infinito. Dovremo, nel corso dell'esercizio, riscriverlo opportunamente a seconda del tipo di altri fattoriali che compariranno.
Poiché

$$(n-1)! \to +\infty,$$

è chiaro che

$$\frac{1}{3(n-1)!} \to 0 \quad \text{quando } n \to +\infty.$$

pertanto il fattore

$$\left(e^{\frac{1}{3(n-1)!}}-1\right)$$

è infinitesimo (tende a $e^0 - 1 = 0$).
Utilizzando la solita approssimazione

$$(e^y - 1) \quad \sim \quad y \quad \text{per } y \to 0,$$

posto $y = \dfrac{1}{3(n-1)!}$, avremo

$$\left(e^{\frac{1}{3(n-1)!}}-1\right) \quad \sim \quad \frac{1}{3(n-1)!} \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Infine, l'ultimo fattore,

$$\sqrt{\frac{n^6}{4}+7n^4+\log^2(n+1)},$$

è dato da un'unica radice quadrata sotto la quale compaiono 3 addendi, ciascuno dei quali tende a $+\infty$. In casi come questi, siamo interessati a considerare solamente l'addendo di infinito di ordine superiore, vale a dire

$$\frac{n^6}{4}.$$

Cioè

$$\sqrt{\frac{n^6}{4}+7n^4+\log^2(n+1)} \sim \sqrt{\frac{n^6}{4}} = \frac{n^3}{2} \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Pertanto possiamo riscrivere il limite come

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)!\left(e^{\frac{1}{3(n-1)!}}-1\right)}{\sqrt{\frac{n^6}{4}+7n^4+\log^2(n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)!\cdot\frac{1}{3(n-1)!}}{\frac{n^3}{2}}.$$

Riscriviamo $(n+2)!$ come

$$(n+2)! = (n+2)(n+1)n(n-1)!$$

e otteniamo il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!\cdot\frac{1}{3(n-1)!}}{\frac{n^3}{2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)(n+1)n\cdot\frac{1}{3}}{\frac{n^3}{2}},$$

che, essendo

$$(n+2) \sim n, \qquad (n+1) \sim n \quad \text{per } n \to +\infty,$$

diviene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^3}{3}}{\frac{n^3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

13) **[T.E. 11/02/2011]**

Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{[(n+3)!-n!]\, e^{\sin(2/n)}}{\left(e^{1/n}+1\right)\left(n^3-1\right)\left(n!-\log n\right)}.$$

Svolgimento.

Come sempre, consideriamo ciascun fattore cercando di stabilire a cosa tenda e di sostituirlo con un termine ad esso equivalente.
Il primo fattore,

$$[(n+3)! - n!]$$

è dato dalla sottrazione di due fattoriali. In casi come questo dobbiamo sviluppare opportunamente facendo comparire il fattoriale di argomento più piccolo.
Si ha

$$[(n+3)! - n!] = [(n+3)(n+2)(n+1)n! - n!] = n!\,[(n+3)(n+2)(n+1) - 1]\,.$$

La parentesi quadra è data da un opportuno polinomio di grado 3 ottenuto moltiplicando i primi tre binomi e sommandogli l'addendo 1.
Poiché si ha

$$(n+3) \;\sim\; n, \quad (n+2) \;\sim\; n, \quad (n+1) \;\sim\; n \;\text{ per } n \to +\infty,$$

avremo

$$[(n+3)(n+2)(n+1) - 1] \quad \sim \quad [n \cdot n \cdot n - 1] = [n^3 - 1] \;\sim\; n^3 \;\text{ per } n \to +\infty.$$

Ne segue che

$$[(n+3)! - n!] = n!\,[(n+3)(n+2)(n+1) - 1] \;\sim\; n! \cdot n^3 \;\text{ per } n \to +\infty.$$

Consideriamo ora il fattore

$$e^{\sin(2/n)}.$$

Poiché

$$\frac{2}{n} \to 0,$$

si ha, per il solito limite notevole,

$$\sin\frac{2}{n} \;\sim\; \frac{2}{n} \;\text{ per } n \to +\infty.$$

da cui

$$e^{\sin(2/n)} \quad \sim \quad e^{2/n} \;\sim e^0 = 1.$$

Pertanto il secondo fattore tende alla quantità finita 1.
Il terzo fattore

$$\left(e^{1/n}+1\right)$$

tende a

$$e^0+1=1+1=2;$$

NON si tratta quindi di un fattore infinitesimo.
Per quanto riguarda il quarto fattore si ha banalmente

$$(n^3-1) \ \sim \ n^3 \ \text{ per } n \to +\infty.$$

Infine, il fattore

$$(n!-\log n)$$

è dato dalla somma algebrica di due addendi tendenti all'infinito. Grazie alla scala degli infiniti possiamo scrivere

$$n!-\log n \quad \sim \quad n! \ \text{ per } n \to +\infty.$$

Pertanto il limite originario diviene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!(n^3)\cdot 1}{2\cdot (n^3)\,(n!)} = \frac{1}{2}.$$

14) **[T.E. 13/07/2010]**

Calcolare il limite di successione

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+7)^n+2n^n}{n^n+8n!+2^n}.$$

Svolgimento.

La successione è costituita da 2 fattori (uno a numeratore, l'altro a denominatore).
Studiamo ciascun fattore.
Il fattore

$$(n+7)^n+2n^n$$

è dato dalla somma di due addendi che tendono entrambi all'infinito; si tratta, però, di addendi della STESSA famiglia di infiniti.
Come osservato in aula, in casi come questo, è ERRATO TRASCURARE uno dei due addendi; infatti, essendo della stessa famiglia, danno entrambi contributo al valore finale del limite.

Procediamo nel seguente modo: raccogliamo uno dei due addendi (per semplicità, quello la cui base è costituita da un monomio). Si ha

$$(n+7)^n + 2n^n = n^n \cdot \left[\frac{(n+7)^n}{n^2} + 2\right] = n^n \left[\left(\frac{n+7}{n}\right)^n + 2\right].$$

Il fattore a denominatore, invece, è dato dalla somma di tre addendi che tendono all'infinito ma appartenenti a tre famiglie differenti di infiniti. In questo caso teniamo solamente l'infinito dominante e scriviamo

$$n^n + 8n! + 2^n \quad \sim \quad n^n \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Il limite iniziale diviene quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n \left[\left(\frac{n+7}{n}\right)^n + 2\right]}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{n+7}{n}\right)^n + 2\right].$$

Consideriamo il primo dei due addendi in quadra e cerchiamo di stabilire a cosa tenda.
Si ottiene il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+7}{n}\right)^n$$

che, poiché $(n+1) \sim n$ per $n \to +\infty$, si presenta nella forma indeterminata $[1^\infty]$.

Si tratta proprio della forma indeterminata associata al limite fondamentale

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

Cerchiamo quindi di scrivere la base della potenza nella forma $(1+y)$ con $y \to 0$. Si ha immediatamente

$$\left(\frac{n+7}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n} + \frac{7}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{7}{n}\right)^n.$$

Per poter applicare il limite notevole (combinato col teorema di sostituzione) dovremmo avere all'esponente il reciproco di $y = \dfrac{7}{n}$, vale a dire

$$\frac{n}{7}.$$

In questo caso è sufficiente moltiplicare e dividere l'esponente per il fattore 7 e applicare la proprietà della potenza di potenza.
Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+7}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left\{\left(1+\frac{7}{n}\right)^{\frac{n}{7}}\right\}^7 = e^7.$$

In definitiva

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{n+7}{n}\right)^n + 2\right] = e^7 + 2.$$

15) **[T.E. 12/01/2015]**

Calcolare il limite di successione

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(e^{-n}\right)\cdot\left[\dfrac{1}{7^n}+2^n\right]+3}{n\left[\log(n+2)-\log n\right]}.$$

Svolgimento.

Il fattore $\sin(e^{-n})$ è infinitesimo poiché, per $n \to +\infty$, si ha $e^{-n} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^n \to 0$, in quanto successione geometrica di ragione $q = \dfrac{1}{e} \in\,]-1, 1[$.
Possiamo quindi scrivere (provvisoriamente)

$$\sin\left(e^{-n}\right) \;\sim\; e^{-n} \;=\; \frac{1}{e^n} \quad \text{per } n \to +\infty$$

a causa del fatto che

$$\sin y \;\sim\; y \;\text{ quando } y \to 0.$$

Pertanto, per l'intero numeratore abbiamo

$$\sin\left(e^{-n}\right)\cdot\left[\frac{1}{7^n}+2^n\right]+3 \;\sim\; \frac{1}{e^n}\cdot\left[\frac{1}{7^n}+2^n\right]+3 \;=\; \frac{1}{(7e)^n}+\left(\frac{2}{e}\right)^n+3 \;\text{ per } n\to+\infty.$$

Poiché

$$\frac{1}{(7e)^n} = \left(\frac{1}{7e}\right)^n \quad \text{e} \quad \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

sono due successioni geometriche tali che $|q| < 1$, avremo che

$$\frac{1}{(7e)^n} \to 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{2}{e}\right)^n \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty,$$

pertanto il numeratore della frazione tende a 3. Possiamo anche scrivere

$$\sin\left(e^{-n}\right) \cdot \left[\frac{1}{7^n} + 2^n\right] + 3 \quad \sim \quad 3 \ \text{ per } n \to +\infty.$$

Il fattore n a denominatore è un infinito già in forma favorevole.
Per quanto riguarda il fattore

$$[\log(n+2) - \log n]\,,$$

osserviamo che la provvisoria approssimazione dell'argomento del primo log con il termine di infinito di ordine superiore porta ad una forma indeterminata. Risulterebbe infatti

$$[\log(n+2) - \log n] \quad \sim \quad [\log n - \log n]\,.$$

Dobbiamo applicare la proprietà dei logaritmi e riscrivere

$$[\log(n+2) - \log n] = \log\left(\frac{n+2}{n}\right) = \log\left(\frac{n}{n} + \frac{2}{n}\right) = \log\left(1 + \frac{2}{n}\right).$$

Poiché

$$y = \frac{2}{n} \to \ 0 \quad \text{per } n \to +\infty,$$

si ha che il termine

$$\log\left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

è infinitesimo.
Dall'approssimazione

$$\log(1+y) \ \sim \ y \ \text{ per } y \to 0,$$

segue immediatamente

$$\log\left(1 + \frac{2}{n}\right) \ \sim \ \frac{2}{n} \ \text{ per } n \to +\infty.$$

Possiamo quindi riscrivere il limite e troviamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(e^{-n}\right)\cdot\left[\dfrac{1}{7^n}+2^n\right]+3}{n[\log(n+2)-\log n]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n\cdot\dfrac{2}{n}} = \frac{3}{2}.$$

16) [**T.E. 31/08/2015**]

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(2x+\arctan(7x)\right)-\log(2x)}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{\sin(2x)}{x^2}}.$$

Svolgimento.

Analizziamo il numeratore. Poiché $t=(7x)\to+\infty$ quando $x\to+\infty$ e poiché

$$\lim_{t\to+\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2},$$

si ha, dal teorema di sostituzione, che

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(7x) = \frac{\pi}{2}$$

da cui

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left[2x+\arctan(7x)\right] = +\infty.$$

Poiché anche

$$\lim_{x\to+\infty} \log(2x) = +\infty,$$

segue che il numeratore si presenta nella forma indeterminata $[+\infty-\infty]$.

Procediamo come al solito applicando la proprietà dei logaritmi. Risulta

$$\log\left(2x+\arctan(7x)\right)-\log(2x) = \log\left[\frac{2x+\arctan(7x)}{2x}\right] = \log\left[\frac{2x}{2x}+\frac{\arctan(7x)}{2x}\right] =$$

$$= \log\left[1+\frac{\arctan(7x)}{2x}\right].$$

Poiché, come si osservava poco fa, $\arctan(7x) \to \frac{\pi}{2}$ per $x \to +\infty$, si ha che

$$y = \frac{\arctan(7x)}{2x} \ \to \ 0 \ \text{ per } x \to +\infty.$$

Dall'approssimazione

$$\log(1+y) \ \sim \ y \ \text{ se } y\ to 0,$$

e ricordando che $\arctan(7x) \ \sim \ \frac{\pi}{2}$ per $x \to +\infty$, si ottiene

$$\log\left[2x + \arctan(7x)\right] - \log(2x) = \log\left[1 + \frac{\arctan(7x)}{2x}\right] \ \sim \ \frac{\arctan 7x}{2x} \ \sim \ \frac{\frac{\pi}{2}}{2x} = \frac{\pi}{4x} \ \text{ per } x \to +\infty.$$

Sarebbe SBAGLIATO approssimare $\arctan(7x)$ con $7x$ poiché $7x$ NON tende a 0 (bensì a $+\infty$).

Consideriamo il denominatore della frazione. Si ha anzitutto

$$\frac{1}{x} - \frac{\sin(2x)}{x^2} = \frac{x - \sin(2x)}{x^2}.$$

Poiché NON ESISTE il

$$\lim_{x \to +\infty} \sin(2x),$$

ma la funzione $\sin(2x)$ è limitata tra -1 e 1, si ha

$$x - \sin(2x) \ \sim \ x \ \text{ per } x \to +\infty.$$

Infatti risulta

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sin(2x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \left[1 - \frac{\sin(2x)}{x}\right]}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[1 - \frac{\sin(2x)}{x}\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[1 - \sin(2x) \cdot \frac{1}{x}\right] = 1 - 0 = 1,$$

a causa del fatto che il termine $\sin(2x) \cdot \frac{1}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$ in quanto è dato dal prodotto di una funzione limitata per una funzione infinitesima.
Poiché il risultato del precedente limite è uguale a 1, siamo effettivamente autorizzati ad affermare l'equivalenza tra $[x - \sin(2x)]$ e x per $x \to +\infty$.

Pertanto, per il denominatore, possiamo affermare che

$$\frac{1}{x} - \frac{\sin(2x)}{x^2} = \frac{x - \sin(2x)}{x^2} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Tornando al limite originario troviamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log\left(2x + \arctan(7x)\right) - \log(2x)}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{\sin(2x)}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{\pi}{4x}}{\dfrac{1}{x}} = \frac{\pi}{4}.$$

STUDIO DELL'IMMAGINE DI UNA SUCCESSIONE

1) **[T.E. 29/03/2010]**

Si determinino $\inf A$, $\sup A$ ed, eventualmente, $\min A$ e $\max A$, essendo

$$A = \left\{ 3\arctan\left[\log\left(\frac{n+1}{n^2}\right)\right],\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \right\}.$$

Svolgimento.

Cominciamo con lo studiare il comportamento della successione

$$a_n = \frac{n+1}{n^2}.$$

Cerchiamo di stabilire se a_n è crescente o decrescente.

Supponiamo, ad esempio, che a_n sia crescente, ossia

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \text{per ogni } n \geq \overline{n},$$

per un certo $\overline{n} \in \mathbb{N}$.

Si ha

$$\frac{(n+1)+1}{(n+1)^2} \geq \frac{n+1}{n^2},$$

cioè

$$\frac{n+2}{n^2+2n+1} \geq \frac{n+1}{n^2},$$

da cui

$$n^3 + 2n^2 \geq n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + n + 1,$$

ossia

$$-n^2 - 3n - 1 \geq 0,$$

che non è mai verificata (non dimentichiamoci del fatto che n è un naturale, quindi $n > 0$).

Quindi la successione (a_n) è decrescente.

La funzione log è crescente; pertanto la composizione

$$\log\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$$

è decrescente.

Infine, la funzione arctan è crescente su tutto il suo dominio; ne segue che la composizione

$$\arctan\left[\log\left(\frac{n+1}{n^2}\right)\right]$$

è una successione decrescente. Moltiplicando per la costante positiva 3, si ottiene la successione finale

$$b_n = 3\arctan\left[\log\left(\frac{n+1}{n^2}\right)\right],\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

che si mantiene decrescente.

Per il teorema sulle successioni monotone si ha:

$$\sup A = \max A = b_1 = 3\arctan\log 2;$$

$$\inf A = \lim_{n\to\infty} b_n = 3\arctan\log(0^+) = 3\arctan(-\infty) = 3\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{2}\pi.$$

2) Si determinino $\inf A$, $\sup A$ ed, eventualmente, $\min A$ e $\max A$, essendo

$$A = \left\{\frac{\cos n\pi}{3} + \frac{1}{n+3},\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Svolgimento.

Cerchiamo anzitutto di capire come si comporta il termine

$$\cos n\pi.$$

Valutiamolo nei primi numeri naturali, cercando di dedurne un comportamento generale.
Si ha

$$\text{per } n = 0,\ \cos(0\pi) = \cos(0) = 1,$$

$$\text{per } n = 1,\ \cos(1 \cdot \pi) = -1,$$

$$\text{per } n = 2,\ \cos(2\pi) = 1,$$

$$\text{per } n = 3,\ \cos(3\pi) = -1,$$

e così via.

Quindi

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} +1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{è dispari} \end{cases}.$$

Pertanto, osserviamo, la successione $\cos(n\pi)$ coincide con la successione $(-1)^n$.
Ne segue che la successione iniziale diviene

$$a_n = \frac{\cos n\pi}{3} + \frac{1}{n+3} = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{n+3} & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{n+3} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Quindi il grafico globale della successione a_n è dato dall'unione dei due grafici delle due successioni

$$b_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{n+3}, \quad n \text{ pari}$$

e

$$c_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{n+3}, \quad n \text{ dispari.}$$

Determiniamo quindi separatamente inf e sup di ciascuna delle due successioni b_n e c_n e considereremo $\inf a_n$ il più piccolo tra i due inf trovati e $\sup a_n$ il più grande dei due sup trovati.

Cominciamo con lo studio di $b_n = 1 + \dfrac{1}{n+3}$, con n pari, vale a dire

$$b_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{n+3}, \quad n = 2, 4, 6, 8, ...$$

La successione

$$n + 3$$

è crescente, pertanto, per quanto detto a lezione, la successione

$$\frac{1}{n+3}$$

è decrescente.
L'aggiunta dell'addendo $+\dfrac{1}{3}$ non modifica la monotonia della successione: quindi la successione

$$b_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{n+3}, \quad n = 0, 2, 4, 6, 8, ...$$

è decrescente.
Per il teorema sulle successioni monotone si ha

$$\inf b_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3},$$

$$\sup b_n = \max b_n = b_0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{0+3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Studiamo ora la successione

$$c_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{n+3}, \quad n = 1, 3, 5, 7, ...$$

Anche in questo caso la successione è monotona decrescente (l'aggiunta dell'addendo -1 non influenza la monotonia).

Pertanto si ha

$$\inf b_n = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{n+3}\right) = -\frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3}$$

$$\sup b_n = \max b_n = b_1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{1+3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}.$$

Tornando alla successione iniziale si ha

$$\inf a_n = -\frac{1}{3}, \quad \sup a_n = \max a_n = \frac{2}{3},$$

da cui

$$\inf A = -\frac{1}{3}, \quad \sup A = \max A = \frac{2}{3}.$$

3) **[T.E. 03/04/2007]**

Si determinino $\inf A$, $\sup A$ ed, eventualmente, $\min A$ e $\max A$, essendo

$$A = \left\{\max\left\{\frac{8n+1}{n},\ n^2+1\right\},\ n \in \mathbb{N}^+\right\}.$$

Svolgimento.

La successione a_n che dobbiamo studiare,

$$a_n = \max\left\{\frac{8n+1}{n},\ n^2+1\right\},\ n \in \mathbb{N}^+$$

è quella successione che associa ad ogni numero naturale $n > 0$ il massimo (vale a dire il più grande) tra i due valori assunti rispettivamente dalla successione

$$b_n = \frac{8n+1}{n}$$

e dalla successione

$$c_n = n^2 + 1.$$

Cerchiamo anzitutto di stabilire le caratteristiche principali di ciascuna delle due successioni in gioco.

Cominciamo da

$$b_n = \frac{8n+1}{n} = 8 + \frac{1}{n} \quad n > 0.$$

Per quanto già osservato in precedenza, tale successione è indubbiamente decrescente.
Si ha

$$\sup b_n = \max b_n = b_1 = 8 + \frac{1}{1} = 9, \qquad \inf b_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty}\left(8 + \frac{1}{n}\right) = 8.$$

Studiamo ora la successione

$$c_n = n^2 + 1, \quad n > 0$$

sicuramente crescente.
Si ha, in questo caso,

$$\inf c_n = \min c_n = c_1 = 1 + 1 = 2, \qquad \sup c_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty}(n^2+1) = +\infty.$$

Vista la monotonia e visti i valori di inf e sup delle due successioni, viene naturale congetturare che inizialmente i valori assunti dalla c_n siano inferiori rispetto a quelli assunti da B_n, dopodiché, da un certo naturale $\overline{n}$ in poi, la situazione si capovolga: i valori assunti da b_n sono maggiori di quelli assunti da c_n.

Valutiamo quindi le due successioni nei primi naturali.
Si ha

$$b_1 = 9, \quad b_2 = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2} = 8,5, \quad b_3 = 8 + \frac{1}{3} = \frac{25}{3} = 8,\overline{3}, \quad b_4 = 8 + \frac{1}{4} = \frac{33}{4} = 8,25, ...$$

$$c_1 = 1 + 1 = 2, \quad c_2 = 4 + 1 = 5, \quad c_3 = 9 + 1 = 10, \quad c_4 = 16 + 1 = 17, ...$$

Per $1 \leq n \leq 2$ si ha $c_n < b_n$, mentre per $n \geq 3$, si ha $c_n > b_n$.
Pertanto, per quanto riguarda la successione a_n si avrà

$$a_1 = \max\{b_1, c_1\} = \max\{9, 2\} = 9,$$

$$a_2 = \max\{b_2, c_2\} = \max\left\{\frac{17}{2}, 5\right\} = \frac{17}{2},$$

$$a_3 = \max\{b_3, c_3\} = \max\left\{\frac{25}{3}, 10\right\} = 10$$

$$a_4 = \max\{b_4, c_4\} = \max\left\{\frac{33}{4}, 17\right\} = 17,$$

e così via, crescendo sempre più sino a tendere a $\sup c_n = +\infty$.

In conclusione, riassumendo tutte le considerazioni fatte, risulta

$$\inf a_n = \min a_n = \frac{17}{2}, \quad \sup a_n = +\infty,$$

cioè

$$\inf A = \min a_n = \frac{17}{2}, \quad \sup A = +\infty.$$