ESERCIZI SUGLI INTEGRALI IMPROPRI

a cura di Michele Scaglia

RICHIAMI TEORICI

INTEGRALI IMPROPRI NOTEVOLI

L'integrale

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}\, dx, \quad 0 < a < 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- CONVERGE
  - per $\alpha < 1$ e per ogni β
  - per $\alpha = 1$ e per $\beta > 1$
- DIVERGE
  - per $\alpha > 1$ e per ogni β,
  - per $\alpha = 1$ e per $\beta \leq 1$.

L'integrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}\, dx, \quad a > 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- CONVERGE
  - per $\alpha > 1$ e per ogni β
  - per $\alpha = 1$ e per $\beta > 1$
- DIVERGE
  - per $\alpha < 1$ e per ogni β,
  - per $\alpha = 1$ e per $\beta \leq 1$.

L'integrale

$$\int_a^1 \frac{1}{(\log x)^\beta}\, dx, \quad 0 < a < 1, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

- CONVERGE
  - per $\beta < 1$
- DIVERGE
  - per $\beta \geq 1$.

L'integrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{e^{\gamma x}}\, dx, \quad a > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- CONVERGE
  - per $\gamma > 0$ (cioè se l'esponenziale rimane a denominatore)
- DIVERGE
  - per $\gamma \leq 0$ (se l'esponenziale sparisce o finisce a numeratore)

Per studiare la convergenza/divergenza dell'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{e^{\gamma x} \cdot x^{\alpha} \cdot (\log x)^{\beta}}\, dx, \quad a > 1, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

per $x \to +\infty$ si tiene presente questa regola:

- Se $\gamma > 0$ (cioè se l'esponenziale rimane a denominatore), l'integrale CONVERGE per ogni valore di α e β.
- Se $\gamma < 0$ (cioè l'esponenziale finisce a numeratore), l'integrale DIVERGE per ogni valore di α e β.
- Se $\gamma = 0$ (cioè l'esponenziale vale costantemente 1 e quindi scompare), l'integrale si riduce al secondo caso illustrato, al quale rimandiamo le casistiche di convergenza/divergenza.

Osserviamo che, in un intorno di $x = 0$, lo studio dell'integrale improprio

$$\int_0^{a} \frac{1}{e^{\gamma x} \cdot x^{\alpha} \cdot (\log x)^{\beta}}\, dx, \quad 0 < a < 1, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

non coinvolge l'esponenziale, in quanto, per $x \to 0$, si ha $e^{\gamma x} \to 1$, quindi, per il criterio del confronto asintotico, lo si può omettere.
Pertanto lo studio del carattere è il medesimo del primo caso esposto in questi richiami teorici.

ESERCIZI SVOLTI

1) Si studi il carattere dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sinh(x) \cdot \sin^2(\sqrt{x})}{(e^{2x}-1) \cdot \log(1+e^{x^3})}\, dx.$$

Svolgimento.

Cerchiamo anzitutto di capire quale sia il dominio della funzione f integranda.
Devono essere soddisfatte le condizioni seguenti:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ (e^{2x}-1) \neq 0 \\ 1+e^{x^3} > 0 \\ \log(1+e^{x^3}) \neq 0 \end{cases}$$

Risolviamo

$$e^{2x}-1 \neq 0.$$

Si ha

$$e^{2x} \neq 1,$$

ossia

$$e^{2x} \neq e^0,$$

da cui $x \neq 0$.

La disequazione

$$1+e^{x^3} > 0$$

è invece soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$ (in quanto l'esponenziale è sempre positivo).
Infine

$$\log(1+e^{x^3}) \neq 0$$

diviene (passando all'esponenziale a entrambi i membri)

$$1+e^{x^3} \neq 1,$$

da cui

$$e^{x^3} \neq 0,$$

che è sempre verificata (in quanto l'esponenziale è maggiore strettamente di 0).
In definitiva, il sistema che fornisce il dominio di f è

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

la cui soluzione è ovviamente

$$x > 0.$$

Pertanto il dominio di f è

$$\mathrm{dom} f =]0; +\infty[.$$

Osserviamo che l'integrale assegnato è definito sull'intervallo $(0; +\infty)$: tale integrale è quindi improprio in quanto, anzitutto, l'intervallo I di integrazione è illimitato; inoltre, in $x = 0$ la funzione f non è definita e presenta una singolarità che potrebbe tradursi in una illimitatezza della f stessa con eventuale divergenza dell'integrale.

Pertanto, come osservato in classe, l'integrale converge se e soltanto se converge sia in un intorno di 0, sia per $x \to +\infty$.
Dobbiamo quindi studiare due convergenze.
Possiamo infatti pensare l'integrale assegnato come

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx,$$

essendo a un qualsivoglia valore numerico intermedio tra 0 e $+\infty$. In tale valore l'integrale non presenta ovviamente problemi in quanto la funzione non è definita solo in $x = 0$.
L'integrale improprio di partenza convergerà se e soltanto se entrambi gli integrali impropri a secondo membro risultano convergenti. Risulterà invece divergente nel caso in cui almeno uno dei due diverga (positivamente, trattandosi di un'integranda positiva).

Osserviamo inoltre che la funzione integranda è sempre positiva o nulla (quindi possiamo applicare i criteri di integrabilità per funzioni positive).

Cominciamo a studiare l'integrabilità impropria in un intorno di 0, vale a dire

$$\int_0^a \frac{\sinh(x) \cdot \sin^2(\sqrt{x})}{(e^{2x} - 1) \cdot \log(1 + e^{x^3})}\,dx.$$

Sia quindi $x \to 0$.

Vogliamo applicare il criterio del confronto asintotico.

Dobbiamo esibire una funzione $0 \leq g(x)$ più semplice di $f(x)$ che verifichi

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in (0; +\infty).$$

Come capitava per le serie numeriche, noi, per comodità, cercheremo di approssimare $f(x)$ con una $g(x)$ che verifichi una condizione più forte di quella richiesta dal teorema. La $g(x)$ che introdurremo sarà tale che

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

cioè

$$g(x) \;\sim\; f(x) \quad \text{per } x \to 0.$$

A tale scopo, è necessario stabilire a cosa tendano i vari fattori che costituiscono l'integranda f quando $x \to 0$.

1° fattore: $\sinh x$.

Si ha

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Pertanto

$$\lim_{x \to 0^+} \sinh x = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0.$$

Il primo fattore è quindi infinitesimo.

Sostituiremo tale fattore infinitesimo per $x \to 0$ con un infinitesimo equivalente dedotto dai limiti notevoli o dagli sviluppi di Taylor.
Seguiamo la seconda possibilità (in quanto a lezione non abbiamo mai dato limiti notevoli che coinvolgano le funzioni iperboliche).
Si ha

$$\sinh x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4),$$

cioè

$$\sinh x \;\sim\; x + \frac{1}{6}x^3 \quad \text{per } x \to 0.$$

In questo caso è sufficiente arrestarsi al primo ordine in quanto il fattore consta solo del termine $\sinh x$ e non si produce quindi alcuna cancellazione.
Pertanto possiamo sostituire, per $x \to 0$,

$$\sinh x \;\sim\; x \quad \text{per } x \to 0.$$

Secondo fattore: $\sin^2(\sqrt{x})$.

Banale è osservare che

$$\lim_{x\to 0} \sin^2\left(\sqrt{x}\right) = 0.$$

Il fattore è quindi infinitesimo.
Per il ben noto limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

da cui

$$\sin t \ \sim \ t \ \text{ per } t \to 0,$$

si ha subito, per il teorema di sostituzione,

$$\sin\left(\sqrt{x}\right) \ \sim \ \sqrt{x} \ \text{ per } x \to 0,$$

da cui

$$\sin^2\left(\sqrt{x}\right) \ \sim \ \left(\sqrt{x}\right)^2 = x \ \text{ per } x \to 0.$$

Terzo fattore: $(e^{2x} - 1)$.

Si ha chiaramente

$$\lim_{x\to 0}(e^{2x} - 1) = 0.$$

Il fattore è quindi infinitesimo.

Poiché

$$e^t - 1 \ \sim \ t \ \text{ per } t \to 0,$$

risulta, posto $t = 2x$,

$$(e^{2x} - 1) \ \sim \ 2x \ \text{ per } x \to \infty.$$

Quarto fattore: $\log(1 + e^{x^3})$.

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \log(1 + e^{x^3}) = \left[\log(1 + e^0)\right] = [\log(1 + 1)] = \log 2.$$

Il quarto fattore tende quindi a una quantità finita e positiva. Lo sostituiremo con la costante $\log 2$ nell'introdurre la funzione $g(x)$.

Pertanto, detta

$$g(x) = \frac{x \cdot x}{(2x) \cdot \log 2} = \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{2x^{-1}},$$

risulta

$$g(x) \sim f(x) \quad \text{per } x \to 0.$$

Per il criterio del confronto asintotico, i due integrali

$$\int_0^a f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_0^a g(x)\,dx$$

hanno esattamente lo stesso carattere.
Poiché (omettendo la costante moltiplicativa $\frac{1}{\log 2}$) l'integrale

$$\int_0^a g(x)\,dx = \int_0^a \frac{1}{2x^{-1}}\,dx$$

è convergente in quanto $\alpha = -1 < 1$ (non dimentichiamoci che siamo in un intorno di $x = 0$, non di $x = +\infty$), ne segue che pure

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a \frac{\sinh(x) \cdot \sin^2(\sqrt{x})}{(e^{2x} - 1) \cdot \log(1 + e^{x^3})}\,dx$$

è convergente.
Per ora abbiamo mostrato che la singolarità in $x = 0$ per f non provoca la divergenza dell'integrale.

Occupiamoci ora di stabilire se la illimitatezza dell'intervallo I di integrazione comporti o meno la divergenza dell'integrale stesso.
Studiamo cioè il caso $x \to +\infty$, vale a dire l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sinh(x) \cdot \sin^2(\sqrt{x})}{(e^{2x} - 1) \cdot \log(1 + e^{x^3})}\,dx.$$

Sia quindi $x \to +\infty$.
Anche in questo caso vogliamo semplificare lo studio dell'integrale.
Solo che, a differenza del caso precedente, ora non si può applicare direttamente il criterio del confronto asintotico (il quale coinvolge limiti), in quanto non esiste il

$$\lim_{x \to +\infty} \sin^2\left(\sqrt{x}\right),$$

essendo la funzione sin continuamente oscillante tra -1 e 1 e di conseguenza la funzione $\sin^2$ oscillante tra 0 e 1.
In questi casi si cerca di utilizzare il criterio del confronto, esibendo una funzione $g(x)$ tale che

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{per ogni } x \in (a; +\infty),$$

confidando nel fatto che l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

risulti convergente.
Poiché

$$\sin^2\left(\sqrt{x}\right) \leq 1 \quad \text{per ogni } x > 0,$$

ne segue che

$$f(x) = \frac{\sinh(x)\cdot\sin^2(\sqrt{x})}{(e^{2x}-1)\cdot\log(1+e^{x^3})} \leq \frac{\sinh(x)\cdot 1}{(e^{2x}-1)\cdot\log(1+e^{x^3})} = g(x) \quad \text{per ogni } x > 0.$$

Cerchiamo quindi di stabilire il carattere dell'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \int_a^{+\infty} \frac{\sinh(x)}{(e^{2x}-1)\cdot\log(1+e^{x^3})}\,dx.$$

Per questo integrale improprio possiamo invece applicare il criterio del confronto asintotico in quanto tutti i fattori dell'integranda ammettono limite per $x \to +\infty$.
Consideriamo i vari fattori.

1° fattore: $\sinh x$.
Si ha, essendo $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \sinh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty.$$

Poiché tale fattore è illimitato per $x \to +\infty$, lo sostituiremo, nell'introdurre la nuova funzione $f(x)$, con l'addendo di infinito maggiore.
In questo caso si tratta di $\frac{1}{2}e^x$.
Pertanto

$$\sinh x \quad \sim \quad e^x \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Secondo fattore: $(e^{2x}-1)$.

Si ha banalmente

$$\lim_{x\to+\infty} \left(e^{2x}-1\right) = +\infty.$$

Anche questo fattore tende all'infinito; ne segue che

$$(e^{2x}-1) \quad \sim \quad e^{2x} \quad \text{per } x \to 0.$$

Ribadiamo che sarebbe stato errato utilizzare in questo caso il limite notevole e sostituire $(e^{2x}-1)$ con $2x$. Infatti, per $x \to +\infty$, i due termini e^{2x} e $2x$ tendono all'infinito (non sono infinitesimi) e non hanno affatto lo stesso comportamento: l'esponenziale va all'infinito molto più rapidamente delle potenze $x^\alpha, \alpha > 0$.

Terzo fattore: $\log(1+e^{x^3})$.

Si ha, per il teorema di sostituzione,

$$\lim_{x\to+\infty} \log(1+e^{x^3}) = +\infty.$$

In pareticolare, l'argomento del logaritmo tende all'infinito. Sappiamo che in questi casi possiamo tenere solo l'addendo di infinito maggiore, vale a dire e^{x^3}.
Si ha quindi

$$\log(1+e^{x^3}) \quad \sim \log(e^{x^3}) = x^3 \cdot \log e = x^3, \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Introduciamo quindi la funzione $h(x)$ adatta al criterio del confronto asintotico con $g(x)$. Si ha

$$h(x) = \frac{\frac{1}{2}e^x}{e^{2x}\cdot x^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^x \cdot x^3} \quad \sim \ g(x) \ \text{ per } x \to +\infty.$$

Poiché (ricordando gli integrali notevoli)

$$\int_a^{+\infty} h(x)\,dx = \int_a^{+\infty} \frac{1}{e^x\cdot x^3}\,dx$$

converge (essendo l'esponenziale a denominatore), ne segue, per confronto asintotico, che converge pure l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \int \frac{\sinh(x)}{(e^{2x}-1)\cdot\log(1+e^{x^3})}\,dx.$$

Quindi, ritornando all'integrale originario di f, per il criterio del confronto, converge pure l'integrale

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} \frac{\sinh(x)\cdot\sin^2(\sqrt{x})}{(e^{2x}-1)\cdot\log(1+e^{x^3})},dx.$$

Pertanto si ha convergenza anche per $x \to +\infty$.
In conclusione l'integrale di partenza

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sinh(x)\cdot\sin^2(\sqrt{x})}{(e^{2x}-1)\cdot\log(1+e^{x^3})}\,dx$$

risulta convergente in quanto sia in 0 che per $x \to +\infty$ c'è convergenza.

2) Si studi, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere dell'integrale improprio

$$\int_0^{1/2} \frac{(x - \sin x) \cdot \cos^2(x)}{x^{|4-\alpha|} \cdot \log^2 x \cdot \log(1+x)} \, dx$$

Svolgimento.

Calcoliamo il dominio di f.

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \\ \log^2 x \neq 0 \\ 1 + x > 0 \\ \log(1+x) \neq 0 \end{cases} \quad .$$

L'equazione

$$\log^2 x \neq 0,$$

che equivale a

$$\log x \neq 0,$$

dà per risultato (passando all'esponenziale)

$$x \neq 1.$$

Risolvendo

$$\log(1+x) \neq 0$$

si trova

$$1 + x \neq e^0,$$

da cui

$$x \neq 0.$$

Quindi il sistema è

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases},$$

che ha per soluzione

$$x > 0 \quad \text{con} \quad x \neq 1.$$

Pertanto il dominio di f è

$$\text{dom} f =]0; 1[\, \cup\,]1; +\infty[.$$

Osserviamo che la funzione non è definita in $x = 0$ e in $x = 1$.
D'altra parte l'integrale sotto studio ha per intervallo

$$I = \left]0, \frac{1}{2}\right[,$$

al quale non appartiene il punto $x = 1$.
L'integrale è quindi improprio solo a causa del punto $x = 0$ in cui, a seconda dei valori del parametro α, la funzione potrebbe diventare illimitata e rendere l'integrale divergente.

Cerchiamo quindi di capire per quali valori di α l'integrale, in un intorno di 0, risulti convergente.

Applicheremo il criterio del confronto asintotico, esibendo un'opportuna funzione positiva $g(x)$ tale che

$$g(x) \sim f(x) \quad \text{per } x \to 0.$$

Per introdurre tale funzione dobbiamo studiare i vari fattori dell'integranda $f(x)$.

1° fattore: $(x - \sin x)$.

Si ha

$$\lim_{x \to 0} (x - \sin x) = 0.$$

Il fattore è infinitesimo ed è dato dalla sottrazione di due infinitesimi. La sostituzione di $\sin x$ con l'infinitesimo equivalente dedotto dai limiti notevoli, cioè $\sin x \sim x$ per $x \to 0$, porterebbe a una cancellazione. Utilizziamo allora gli sviluppi di Taylor.

Si ha

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), \quad \text{per } x \to 0.$$

Nel nostro caso è sufficiente fermarsi al terzo ordine (infatti la potenza di grado 3 non si cancella).
Si ha quindi

$$(x - \sin x) \quad \sim \quad \frac{1}{6}x^3 \;\; \text{per } x \to 0.$$

Secondo fattore: $\cos^2 x$.

Si ha

$$\lim_{x \to 0} \cos^2 x = 1^2 = 1.$$

Quindi tale fattore lo sostituiremo col valore fisso 1.

Terzo fattore: $x^{|4-\alpha|}$.

Tale fattore si presenta già in una forma favorevole (pensando alle tavole degli integrali notevoli cui vorremo fare riferimento).

Quarto fattore: $\log^2 x$.

Anche tale fattore già si presenta in forma adatta.

Quinto fattore: $\log(1 + x)$.

Risulta banalmente

$$\lim_{x \to 0} \log(1 + x) = 0.$$

Dal limite notevole si ha immediatamente che

$$\log(1 + x) \;\sim\; x \;\; \text{per } x \to 0.$$

Possiamo quindi introdurre la funzione $g(x)$ adatta al criterio del confronto asintotico.

Risulta

$$g(x) = \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^{|4-\alpha|} \cdot \log^2 x \cdot x} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x^{|4-\alpha|-2} \cdot \log^2 x} \quad \sim \quad f(x) \;\; \text{per } x \to 0.$$

Studiamo quindi per quali valori del parametro α si ha la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{1/2} g(x)\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{x^{|4-\alpha|-2}\cdot \log^2 x}\,dx.$$

Ricordando la tavola degli integrali impropri notevoli, si ha che il precedente integrale converge sicuramente se

$$|4-\alpha|-2<1,$$

cioè

$$|4-\alpha|<3.$$

Tale disequazione con valore assoluto equivale a

$$-3<4-\alpha<3,$$

vale a dire al sistema

$$\begin{cases} 4-\alpha>-3 \\ 4-\alpha<3 \end{cases}.$$

Il precedente sistema diviene

$$\begin{cases} \alpha<7 \\ \alpha>1 \end{cases},$$

che ha per soluzione

$$1<\alpha<7.$$

Se $|4-\alpha|-2=1$ c'è comunque convergenza in quanto l'esponente del logaritmo è $2>1$.

Calcoliamo quindi gli α per cui

$$|4-\alpha|=3.$$

Si ha

$$4-\alpha=-3 \quad \cup \quad 4-\alpha=3,$$

da cui

$$\alpha=7 \quad \cup \quad \alpha=1.$$

In definitiva, l'integrale improprio

$$\int_0^{1/2} g(x)\,dx$$

converge se e solo se

$$1 \le \alpha \le 7.$$

Per il criterio del confronto asintotico segue che pure l'integrale di partenza

$$\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} \frac{(x-\sin x)\cdot\cos^2(x)}{x^\alpha\cdot\log^2 x\cdot\log(1+x)}\,dx$$

converge per

$$1 \le \alpha \le 7.$$

3) Si studi, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere dell'integrale improprio

$$\int_5^{+\infty} \frac{[\sin(e^{-x})]^\alpha\cdot\log x}{x^{2/3}\cdot(e^{3x}-1)}\,dx.$$

Svolgimento.

Osserviamo anzitutto che, per ogni $x > 0$, la funzione integranda è positiva.

Calcoliamo il dominio dell'integranda f.
Osserviamo che, affinché abbia senso la potenza reale

$$\left[\sin\left(e^{-x}\right)\right]^\alpha$$

abbia senso, la base deve essere strettamente maggiore di 0.

Quindi, osservati anche gli altri fattori che costituiscono l'integranda, il sistema da impostare per individuare il campo di esistenza è il seguente:

$$\begin{cases} \sin(e^{-x}) > 0 \\ x > 0 \\ e^{3x}-1 \neq 0 \end{cases}.$$

Consideriamo la prima disequazione.
Osserviamo che

$$\sin\left(e^{-x}\right) = \sin\left(\frac{1}{e^x}\right).$$

Essendo $e^x > 1$ per ogni $x > 0$ (nel nostro caso, a dire il vero, è $x > 5$), ne segue che

$$0 < \frac{1}{e^x} \le 1, \quad \forall x > 5.$$

Pertanto, l'argomento del sin è minore o uguale di un radiante (circa 57°).
Quindi la funzione sin assume tutti valori positivi.
La disequazione è soddisfatta per ogni $x > 5$.

La condizione

$$e^{3x} - 1 \neq 0,$$

ossia

$$e^{3x} \neq e^0$$

dà per risultato

$$3x \neq 0, \qquad \text{cioè} \quad x \neq 0.$$

Inoltre, il logaritmo è definito per $x > 0$.

Il sistema da risolvere è quindi

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases},$$

che risolto dà

$$x > 0.$$

Il dominio di f è quindi

$$\mathrm{dom} f =]0; +\infty[.$$

D'altra parte, nel nostro esercizio, l'intervallo di integrazione è

$$I =]5; +\infty[,$$

e la singolarità $x = 0$ non appartiene a tale intervallo. La funzione è quindi continua su tutto I. L'integrale assegnato è quindi improprio solamente a causa della illimitatezza dell'intervallo di integrazione I.
Dovremo cercare allora di stabilire per quali valori del parametro α l'integrale non diverge per $x \to +\infty$.
Sia quindi $x \to +\infty$.

Consideriamo i vari fattori.

Primo fattore: $[\sin(e^{-x})]^{\alpha}$.

Per il momento consideriamo l'argomento della potenza, vale a dire

$$\left[\sin\left(e^{-x}\right)\right].$$

Studiamone il limite per $x \to +\infty$: osservato che $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ e che $\lim\limits_{t\to 0}\sin t = 0$, si ha, per il teorema di sostituzione,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sin\left(e^{-x}\right)\right] = [\sin(0)] = 0.$$

Il fattore è pertanto infinitesimo.

Poiché

$$\sin t \;\sim\; t \;\; \text{per } t \to 0,$$

si ha, posto $t = e^{-x}$,

$$\sin\left(e^{-x}\right) \;\sim\; e^{-x} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

da cui, passando alla potenza,

$$\left[\sin\left(e^{-x}\right)\right]^{\alpha} \;\sim\; \left[e^{-x}\right]^{\alpha} = e^{-\alpha x} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Secondo fattore: $\log x$.

Tale fattore si presenta già in forma favorevole.

Terzo fattore: $x^{2/3}$.

Anche questo fattore è già in forma favorevole.

Quarto fattore: $(e^{3x} - 1)$.

Si ha, essendo $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{3x} - 1\right) = +\infty.$$

Poiché il fattore tende all'infinito, dobbiamo tenere l'addendo di infinito maggiore, cioè e^{3x} (in verità è anche l'unico addendo che tende all'infinito all'interno del fattore).
Quindi

$$\left(e^{3x} - 1\right) \;\sim\; e^{3x} \;\; \text{per } \; x \to +\infty.$$

Pertanto, la funzione $g(x)$ adatta al criterio del confronto asintotico è

$$g(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{x^{2/} \cdot e^{3x}}.$$

Ne segue che i valori di α per cui converge

$$\int_5^{+\infty} g(x)\,dx = \int_5^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x^{2/3} \cdot e^{3x}}\,dx$$

sono tutti e soli i valori di α per cui converge l'integrale di partenza

$$\int_5^{+\infty} f(x)\,dx = \int_5^{+\infty} \frac{[\sin(e^{-x})]^{\alpha} \cdot \log x}{x^{2/3} \cdot (e^{3x} - 1)}\,dx.$$

Studiamo quindi la convergenza di

$$\int_5^{+\infty} g(x)\,dx = \int_5^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x^{2/3} \cdot e^{3x}}\,dx.$$

Riscriviamo come

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^{2/3} \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{3x}}\,dx = \int_5^{+\infty} \frac{1}{e^{(\alpha+3)x} \cdot x^{2/3}}\,dx.$$

Sicuramente, se

$$\alpha + 3 > 0,$$

ossia se

$$\alpha > -3$$

l'integrale converge, poiché il fattore esponenziale rimane a denominatore.
Se, invece,

$$\alpha < -3,$$

l'integrale sicuramente diverge.
Analizziamo ora il caso $\alpha = -3$, nel quale non compare più la funzione esponenziale.

L'integrale diviene

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^{2/3}}\,dx,$$

divergente, in quanto $\alpha = \dfrac{2}{3} < 1$.
In definitiva, si ha convergenza se e solo se

$$\alpha > -3.$$

4) Si calcoli l'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} (x-1)\cdot e^{-x^2+2x}\,dx.$$

Svolgimento.

La funzione integranda è definita su tutto $\mathbb{R}$.
L'integrale da calcolare è improprio a causa della illimitatezza dell'intervallo I di integrazione. Si ha infatti

$$I =]2; +\infty[.$$

Per definizione di integrale improprio si ha

$$\int_2^{+\infty} (x-1)\cdot e^{-x^2+2x}\,dx := \lim_{t\to+\infty}\left[\int_2^{t} (x-1)\cdot e^{-x^2+2x}\,dx\right].$$

Cominciamo a calcolare l'integrale

$$\int_2^{t} (x-1)\cdot e^{-x^2+2x}\,dx.$$

Per prima cosa procuriamoci una primitiva dell'integranda. Risolviamo cioè l'integrale indefinito

$$\int (x-1)\cdot e^{-x^2+2x}\,dx.$$

Per prima cosa cerchiamo di capire se l'integrale sia risolubile per mezzo di una sostituzione. Poniamo

$$-x^2+2x = y,$$

da cui, derivando alla Leibniz,

$$(-2x+2)\,dx = dy,$$

$$-2(x-1)\,dx = dy.$$

Moltiplichiamo e dividiamo l'integranda per il fattore costane -2. Risulta
occorre moltiplicare e dividere l'integranda per il fattore -2: si ha

$$\int (x-1)\cdot e^{-x^2+2x}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\int (-2)(x-1)\cdot e^{-x^2+2x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^{y} \cdot dy = -\frac{1}{2}e^{y} + c = -\frac{1}{2}e^{-x^2+2x} + c.$$

Detta ad esempio F la primitiva con $c = 0$ risulta

$$\int_2^t (x-1) \cdot e^{-x^2+2x}\, dx = F(t) - F(2) =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t^2+2t} - \left(-\frac{1}{2}e^{-4+4}\right) = -\frac{1}{2}e^{-t^2+2t} + 1.$$

Calcoliamo quindi

$$\lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{2}e^{-t^2+2t} + \frac{1}{2}.$$

Poiché

$$\lim_{t\to+\infty} (-t^2 + 2t)$$

porta alla forma indeterminata $[+\infty - \infty]$, occorre tenere il termine corrispondente all'infinito di ordine superiore.
Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} (-t^2 + 2t) = \lim_{t\to+\infty} -t^2 = -\infty.$$

Pertanto

$$\lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{2}e^{-t^2+2t} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}e^{-\infty} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ne segue che

$$\int_2^{+\infty} (x-1) \cdot e^{-x^2+2x}\, dx = \frac{1}{2}.$$

L'integrale è quindi convergente.

5) **[T.E. 26/01/2009]**

Si calcoli l'integrale improprio seguente

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\sqrt{7x}\right)}{(1+7x)\sqrt{7x}}\, dx.$$

Svolgimento.

L'integrale è improprio: infatti, l'intervallo I di integrazione è illimitato.
Inoltre, la funzione integranda non è definita in $x = 0$. Tuttavia

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\arctan\left(\sqrt{7x}\right)}{(1+7x)\sqrt{7x}} = 1,$$

grazie al limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{\arctan t}{t} = 1.$$

Quindi, in un intorno di $x = 0$ la funzione integranda è limitata.
Pertanto, pur non essendo f definita in $x = 0$, l'integrale non diviene improprio a causa di $x = 0$.

Osserviamo infine, che l'ulteriore condizione da imporre per individuare il dominio di f è

$$x \neq -\frac{1}{7},$$

ma tale punto non è di nostro interesse in quanto non appartiene all'intervallo $I =]0; +\infty[$.

L'integrale da calcolare diviene dunque, per definizione di integrale improprio,

$$\lim_{t\to+\infty} \left[\int_0^t \frac{\arctan\left(\sqrt{7x}\right)}{(1+7x)\sqrt{7x}}\, dx\right].$$

Calcoliamoci quindi una primitiva F di f risolvendo

$$\int \frac{\arctan\left(\sqrt{7x}\right)}{(1+7x)\sqrt{7x}}\, dx.$$

Operiamo una sostituzione.
Poniamo

$$\arctan\sqrt{7x} = y,$$

da cui, derivando alla Leibniz, otteniamo

$$\frac{1}{1+7x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{7x}} \cdot 7\, dx = dy,$$

da cui

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{(1+7x)\sqrt{7x}}\, dx = dy.$$

Pertanto si ha, osservato che $7x = \left(\sqrt{7x}\right)^2 = y^2$,

$$\int \frac{\arctan\left(\sqrt{7x}\right)}{(1+7x)\sqrt{7x}}\, dx = \frac{2}{7} \cdot \int \frac{7}{2} \cdot \frac{\arctan\left(\sqrt{7x}\right)}{(1+7x)\sqrt{7x}}\, dx$$

$$= \frac{2}{7} \cdot \int y \, dy = \frac{2}{7} \cdot \frac{y^2}{2} + c = \frac{1}{7} y^2 + c =$$

$$= \frac{1}{7} \left(\arctan \sqrt{7x} \right)^2 + c$$

Detta F la primitiva con ad esempio $c = 0$, abbiamo

$$\int_0^t \frac{\arctan\left(\sqrt{7x}\right)}{(1+7x)\sqrt{7x}} \, dx = F(t) - F(0) =$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \left[\left(\arctan \sqrt{7t} \right)^2 - \left(\arctan \sqrt{0} \right)^2 \right] = \frac{1}{7} \left(\arctan \sqrt{7t} \right)^2 .$$

In conclusione, essendo $\lim_{t \to +\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$, risulta, per il teorema di sostituzione,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\sqrt{7x}\right)}{(1+7x)\sqrt{7x}} \, dx = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{7} \left(\arctan \sqrt{7t} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{28}.$$

L'integrale improprio è quindi convergente.

6) **[T.E. 29/01/2010]**

Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{x/4} - 1}{(\sinh x)^{\alpha} x^{3/2}} \, dx.$$

Svolgimento.

L'integrale è da considerarsi improprio sia a causa della illimitatezza dell'intervallo I di integrazione, sia a causa del fatto che la funzione f non è definita in $x = 0$ e potrebbe presentare in tale punto, al variare di α, un'illimitatezza tale da comportare la divergenza dell'integrale medesimo in un intorno di $x = 0$.
I valori di α per i quali l'integrale converge sono quindi tutti e soli i valori di α per cui si ha convergenza sia in un intorno di $x = 0$ sia per $x \to +\infty$.
Possiamo scrivere l'integrale come

$$\int_0^{+\infty} f(x) \, dx = \int_0^a f(x) \, dx + \int_a^{+\infty} f(x) \, dx,$$

essendo a un qualsivoglia valore numerico intermedio tra 0 e $+\infty$. In tale valore a l'integrale non presenta ovviamente problemi in quanto la funzione f non è definita solo in $x = 0$.

Cominciamo a studiare il caso $x \to 0^+$, cercando di applicare il criterio del confronto asintotico.
Consideriamo quindi l'integrale improprio

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a \frac{e^{x/4}-1}{(\sinh x)^\alpha x^{3/2}}\,dx.$$

Studiamo il comportamento di ciascun fattore per $x \to 0^+$.

1° fattore: $\left(e^{x/4}-1\right)$.

Si ha banalmente

$$\lim_{x\to 0^+}\left(e^{x/4}-1\right) = [e^0-1] = 0.$$

Il fattore è quindi infinitesimo.
Poiché

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = 1,$$

cioè

$$e^t - 1 \;\sim\; t \;\text{ per } t \to 0,$$

risulta, posto $t = \dfrac{x}{4}$,

$$e^{x/4}-1 \quad\sim\quad \frac{x}{4} \quad\sim\quad x \;\text{ per } x \to 0^+.$$

2° fattore: $(\sinh x)^\alpha$.

Sappiamo che

$$\lim_{x\to 0}\sinh x = 0.$$

Il fattore è quindi infinitesimo.
Ricorriamo agli sviluppi in serie di Taylor.
Si ha

$$\sinh x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \;\text{ per } x \to 0.$$

Poiché il fattore è infinitesimo per conto suo (e non è dato dalla somma di addendi infinitesimi), è sufficiente arrestarsi al primo ordine, in quanto non potranno esserci cancellazioni di monomi nello sviluppo.
Pertanto

$$\sinh x \quad\sim\quad x \;\text{ per } x \to 0^+,$$

da cui, passando alla potenza,

$$(\sinh x)^\alpha \;\sim\; (x)^\alpha \;\text{ per } x \to 0^+.$$

Infine, il fattore

$$x^{3/2}$$

è gia in forma favorevole.
Introdotta quindi la funzione

$$g(x) = \frac{x}{x^\alpha \cdot x^{3/2}}$$

si ha chiaramente

$$g(x) \;\sim\; f(x) \;\text{ per } x \to 0^+.$$

Il criterio del confronto asintotico garantisce che

$$\int_0^a f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_0^a g(x)\,dx$$

abbiano lo stesso carattere.
Individuiamo quindi i valori di α per i quali converge

$$\int_0^a g(x)\,dx = \int_0^a \frac{x}{x^\alpha \cdot x^{3/2}}\,dx.$$

Poiché l'indeterminazione è in $x = 0$, l'integrale

$$\frac{x}{x^\alpha \cdot x^{3/2}}\,dx = \int_0^a \frac{1}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

converge quando

$$\alpha + \frac{1}{2} < 1,$$

ossia quando

$$\alpha < \frac{1}{2}.$$

Di conseguenza, per confronto asintotico, pure l'integrale

$$\int_0^a f(x) = \int_0^a \frac{e^{x/4} - 1}{(\sinh x)^\alpha x^{3/2}}\,dx$$

converge per $\alpha < \frac{1}{2}$.

Individuati i valori di α che garantiscono la convergenza in un intorno di 0, preoccupiamoci ora di trovare i valori del parametro α che, invece, garantiscano la convergenza quando $x \to +\infty$.
Interessiamoci dunque all'integrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{e^{x/4}-1}{(\sinh x)^\alpha x^{3/2}}\,dx.$$

Analizziamo il comportamento di ciascun fattore per $x \to +\infty$.

1° fattore: $\left(e^{x/4}-1\right)$.

Si ha ovviamente

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x/4}-1\right)=+\infty.$$

Poiché il fattore tende all'infinito, dobbiamo tenere l'addendo di infinito maggiore, vale a dire

$$e^{x/4},$$

che, in realtà, è anche l'unico addendo che tende all'infinito.
Osserviamo che è essenziale tenere il 4 a denominatore.
Infatti, i termini

$$e^x \quad \text{e} \quad e^{x/4}=\sqrt[4]{e^x}$$

non hanno lo stesso ordine di infinito (il primo è maggiore).
Tornando all'esercizio, quando introdurremo la funzione $g(x)$ equivalente a $f(x)$ per $x \to +\infty$, sostituiremo il fattore

$$e^{x/4}-1$$

con

$$e^{x/4},$$

cioè

$$e^{x/4}-1 \;\sim\; e^{x/4} \quad \text{per } x\to+\infty.$$

2° fattore: $(\sinh x)^\alpha$.

Come detto a lezione, per studiare le funzioni iperboliche quando $x \to +\infty$ è buona cosa richiamare la definizione di tali funzioni.
Ricordiamo che

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}.$$

Calcoliamone il limite per $x \to +\infty$.
Risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \sinh x = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x}\right) = +\infty.$$

Il fattore tende quindi all'infinito. Dei due addendi che lo costituiscono considereremo solamente quello che tende a $+\infty$, vale a dire

$$\frac{1}{2}e^{x}.$$

Pertanto, per $x \to +\infty$,

$$(\sinh x)^{\alpha} = \left(\frac{1}{2}e^{x}\right)^{\alpha} = \frac{1}{2^{\alpha}} \cdot e^{\alpha\cdot x}.$$

3° fattore: $x^{3/2}$.
Tale fattore è già in forma favorevole.
Introdotta la funzione

$$g(x) = 2^{\alpha} \cdot \frac{e^{x/4}}{e^{\alpha\cdot x} \cdot x^{3/2}},$$

il criterio del confronto asintotico garantisce che

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

abbiano esattamente lo stesso carattere.
Individuiamo quindi i valori di α per cui converge

$$\int_a^{+\infty} g(x) \ = 2^{\alpha} \cdot \int_a^{+\infty} \frac{e^{x/4}}{e^{\alpha\cdot x} \cdot x^{3/2}}\,dx =$$

$$= 2^{\alpha} \cdot \int_a^{+\infty} \frac{1}{e^{(\alpha-1/4)\cdot x} \cdot x^{3/2}}\,dx.$$

Ricordando quanto richiamato nelle prime pagine, si hanno i seguenti casi:

- se $\alpha - \frac{1}{4} > 0$, ossia se $\alpha > \frac{1}{4}$, l'integrale sicuramente converge (perché l'esponenziale rimane al denominatore);
- se $\alpha - \frac{1}{4} = 0$, ossia se $\alpha = \frac{1}{4}$ l'integrale diviene

  $$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx,$$

  convergente, in quanto l'esponente di x è maggiore di 1 (non dimentichiamoci che siamo in un intorno di $+\infty$).

- se $\alpha - \frac{1}{4} < 0$, ossia se $\alpha < \frac{1}{4}$, l'integrale sicuramente diverge (in quanto l'esponenziale finisce a numeratore causando la illimitatezza della funzione).

Pertanto, l'integrale

$$\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$$

converge se e solo se

$$\alpha \geq \frac{1}{4}.$$

Stesso discorso per

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Affinché l'integrale complessivo

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{x/4} - 1}{(\sinh x)^\alpha x^{3/2}}\, dx$$

converga, si deve quindi avere

$$\begin{cases} \alpha < \frac{1}{2} \\ \alpha \geq \frac{1}{4} \end{cases},$$

da cui

$$\frac{1}{4} \leq \alpha < \frac{1}{2}.$$

7) [T.E. 11/02/2011]

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int 3 \cdot \frac{\arctan x}{x^2}\, dx$$

e quindi utilizzare la primitiva trovata per calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} 3 \cdot \frac{\arctan x}{x^2}\, dx.$$

Svolgimento.

Calcoliamo l'integrale

$$\int 3 \cdot \frac{\arctan x}{x^2}\, dx = 3 \cdot \int \frac{\arctan x}{x^2}\, dx.$$

Riscriviamo l'integrale come

$$3 \cdot \int (\arctan x) \cdot x^{-2}\, dx.$$

L'integranda è data dal prodotto di due funzioni di specie diverse non legate l'una all'altra da derivate di composte.
Utilizziamo quindi la regola di integrazione per parti.
Deriviamo $\arctan x$ e integriamo x^{-2}.

$$\begin{array}{ccc} \textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\ \arctan x & & x^{-2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \nwarrow & \\ \dfrac{1}{1+x^2} & \overset{\longleftarrow}{-\int \cdot} & -\dfrac{1}{x} \end{array}$$

L'integrale diviene

$$3 \cdot \int (\arctan x) \cdot x^{-2}\, dx = 3 \cdot \left[\frac{-\arctan x}{x} + \int \frac{1}{(1+x^2)x}\, dx \right].$$

Risolviamo

$$\int \frac{1}{(1+x^2)x}\, dx.$$

Si tratta dell'integrale di una funzione razionale fratta in cui il denominatore ha grado maggiore del numeratore.
Utilizziamo la regola dei fratti.
Cerchiamo tre numeri $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}.$$

Si ha

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A + Ax^2 + Bx^2 + Cx}{x(1+x^2)} = \frac{x^2(A+B) + Cx + A}{x(1+x^2)}.$$

Affinché la frazione ottenuta coincida con

$$\frac{1}{x(1+x^2)}$$

si deve avere

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ A = 1 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 0 \end{cases} .$$

Pertanto risulta

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.$$

Ne segue che

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{1+x^2} = \log|x| - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \log|x| - \frac{1}{2}\log|1+x^2| + c = \log\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + c.$$

In definitiva, tornando all'integrale originario, si ha

$$3 \cdot \int (\arctan x) \cdot x^{-2}\,dx = 3 \cdot \left[\frac{-\arctan x}{x} + \log\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + c\right].$$

Passiamo alla seconda parte dell'esercizio, il calcolo dell'integrale improprio.
Osserviamo che la funzione integranda,

$$\frac{\arctan x}{x^2}$$

è definita e continua per ogni $x \neq 0$.
L'integrale

$$\int_1^{+\infty} 3 \cdot \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$$

è improprio solo a causa della illimitatezza dell'intervallo di integrazione $I =]1, +\infty[$. Si tratta dell'integrale improprio di una funzione limitata su un intervallo illimitato.
Il valore dell'integrale lo si ottiene nel seguente modo:

$$\int_1^{+\infty} 3 \cdot \frac{\arctan x}{x^2}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t 3 \cdot \frac{\arctan x}{x^2}\,dx.$$

Poiché abbiamo già calcolato la primitiva generica di $f(x)$, si ha facilmente

$$\int_1^t 3 \cdot \frac{\arctan x}{x^2}\,dx = \left[3 \cdot \left(\frac{-\arctan x}{x} + \log\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]_1^t =$$

$$= 3 \cdot \left\{ \left[\frac{-\arctan t}{t} + \log \frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}} \right] - \left[\frac{-\arctan 1}{1} + \log \frac{|1|}{\sqrt{1+1}} \right] \right\} =$$

$$= 3 \cdot \left\{ \left[\frac{-\arctan t}{t} + \log \frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}} \right] + \frac{\pi}{4} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Dobbiamo ora calcolare il limite

$$\lim_{t \to +\infty} = 3 \cdot \left\{ \left[\frac{-\arctan t}{t} + \log \frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}} \right] + \frac{\pi}{4} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} =$$

$$= 3 \cdot \left[\frac{\pi}{4} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} \right] + 3 \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{-\arctan t}{t} + \log \frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}} \right].$$

Consideriamo l'addendo

$$\lim_{t \to +\infty} \left[\frac{-\arctan t}{t} + \log \frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}} \right].$$

Poiché

$$|t| = \sqrt{t^2},$$

si ha

$$\lim_{t \to +\infty} \left[\frac{-\arctan t}{t} + \log \frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}} \right] = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{-\arctan t}{t} + \log \sqrt{\frac{t^2}{t^2+1}} \right] =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{-\arctan t}{t} + \log \sqrt{\frac{t^2}{t^2}} \right] = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{-\arctan t}{t} + \log \sqrt{1} \right] =$$

$$= \left[\frac{-\frac{\pi}{2}}{+\infty} + 0 \right] = 0.$$

Pertanto,

$$\int_1^{+\infty} 3 \cdot \frac{\arctan x}{x^2} \, dx = 3 \cdot 0 + 3 \cdot \left[\frac{\pi}{4} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} \right] = 3 \cdot \left[\frac{\pi}{4} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} \right],$$

il che significa che l'integrale improprio è convergente.

8) **[T.E. 11/06/2012]**

Determinare per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ converge l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x^3}\right)}{x^\beta \log\left(1+\arctan x\right)}\, dt.$$

Svolgimento.

La funzione integranda

$$f(x) = \frac{\arctan\left(\frac{1}{x^3}\right)}{x^\beta \log\left(1+\arctan x\right)}$$

è definita su $]0,+\infty[$, a causa del fattore x^β, con $\beta \in \mathbb{R}$ (potenza con esponente reale). Osserviamo altresì che, per $x > 0$, il termine $\arctan x$ è strettamente maggiore di 0, per cui l'argomento del logaritmo è strettamente maggiore di 1, quindi il denominatore della frazione non si annulla mai.
Poiché $\frac{1}{x^3} > 0$, ne segue che $\arctan\left(\frac{1}{x^3}\right) > 0$. Pertanto la funzione integranda è positiva su $]0,+\infty[$.
Per studiare il carattere faremo ricorso ai criteri di convergenza per funzioni positive.

L'integrale risulta improprio a causa della singolarità in 0 e a causa della illimitatezza da destra dell'intervallo di integrazione.
I valori di β per cui l'integrale risulta convergente sono quindi tutti e soli quei valori per cui si ha convergenza in un intorno di 0 e per $x \to +\infty$.
Dobbiamo quindi studiare la convergenza dei due integrali

$$I_1 = \int_0^a f(x)\, dx \quad \text{e} \quad I_2 = \int_a^{+\infty} f(x)\, dx, \quad \text{con } a > 0.$$

Cominciamo con lo studio di I_1.
Vogliamo applicare il criterio del confronto asintotico. Cerchiamo quindi una funzione $g(x) > 0$ tale che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in]0,+\infty[$$

o, per semplicità,

$$g(x) \ \sim \ f(x) \ \text{ per } x \to 0^+.$$

Per fare ciò, è necessario capire a cosa tendano, per $x \to 0^+$, i vari fattori che costituiscono la funzione $f(x)$.
Cominciamo col primo fattore,

$$\arctan\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Poiché per $x \to 0^+$ risulta $\dfrac{1}{x^3} \to +\infty$ ed essendo anche $\lim_{t\to+\infty} \arctan t = \dfrac{\pi}{2}$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Nell'introdurre la funzione $g(x)$, sostituiremo a tale fattore il valore $\frac{\pi}{2}$.
Il secondo fattore, x^β, è già in forma favorevole.

Analizziamo il terzo fattore,

$$\log\left(1 + \arctan x\right).$$

Si ha, per il teorema di sostituzione,

$$\lim_{x\to 0^+} \log\left(1 + \arctan x\right) = \log(1+0) = 0.$$

Poiché si ha

$$\log(1+y) \ \sim\ y \quad \text{per } y \to 0,$$

e

$$\arctan x \ \sim\ x \quad \text{per } x \to 0,$$

si trova, per il teorema di sostituzione,

$$\log\left(1 + \arctan x\right) \ \sim\ \arctan x \ \sim\ x \quad \text{per } x \to 0^+.$$

Pertanto, la funzione $g(x)$ adatta all'applicazione del criterio del confronto asintotico è

$$g(x) = \frac{\frac{\pi}{2}}{x^\beta \cdot x} \ \sim\ f(x) \quad \text{per } x \to 0^+.$$

Studiamo quindi il carattere di

$$\int_0^a g(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^a \frac{1}{x^{\beta+1}}\,dx.$$

Sappiamo che tale integrale converge se e solo se

$$\beta + 1 < 1,$$

cioè, se e solo se

$$\beta < 0.$$

Per il criterio del confronto asintotico, si ha che l'integrale I_1 converge se e solo se

$$\beta < 0.$$

Consideriamo ora la convergenza dell'integrale I_2, cioè

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Per l'applicazione del criterio del confronto asintotico, dobbiamo studiare il comportamento dei vari fattori per $x \to +\infty$, per poter così esibire una funzione $h(x) > 0$ tale che

$$h(x) \sim f(x) \text{ per } x \to +\infty.$$

Per quanto riguarda il primo fattore, essendo $\dfrac{1}{x^3} \to 0$ per $x \to +\infty$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^3}\right) = \arctan 0 = 0.$$

In forza del limite notevole già richiamato precedentemente, possiamo affermare che

$$\arctan\left(\frac{1}{x^3}\right) \sim \frac{1}{x^3} \text{ per } x \to +\infty.$$

Il secondo fattore, x^β, è già in forma favorevole.

Per il terzo fattore, invece, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \log(1 + \arctan x) = \log\left(1 + \frac{\pi}{2}\right),$$

che è una costante maggiore strettamente di 0, che chiameremo K per semplicità.
Una funzione $h(x) \sim f(x)$ quando $x \to +\infty$ è quindi

$$h(x) = \frac{\frac{1}{x^3}}{x^\beta \cdot K}.$$

Studiamo, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, il carattere di

$$\int_a^{+\infty} h(x)\,dx = \frac{1}{K}\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{3+\beta}}\,dx.$$

Quest'ultimo integrale converge se e solo se

$$3 + \beta > 1,$$

cioè se e solo se

$$\beta > -2.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale I_2 converge se e solo se

$$\beta > -2.$$

In definitiva, l'integrale di partenza converge se e solo convergono contemporaneamente l'integrale I_1 e l'integrale I_2, cioè per tutti e soli i β tali che

$$\begin{cases} \beta < 0 \\ \beta > -2 \end{cases},$$

cioè per

$$\beta \in]-2, 0[.$$

9) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare il carattere dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)^2}{\log(x^2+1)(x-1)^\alpha}\, dx.$$

Svolgimento.

Osserviamo che l'integrale è **improprio** per **due motivi**: a causa del fatto che il dominio di integrazione è illimitato ma anche a causa del fatto che la funzione integranda non è definita in $x = 1$ e, per certi valori di α, potrebbe divergere e rendere l'integrale infinito.
Dobbiamo quindi individuare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui l'integrale non diverge né in un intorno di $x = 1$ né quando $x \to +\infty$.

Cominciamo a studiare il comportamento per $x \to 1^+$, cioè studiamo il carattere di

$$\int_1^a f(x)\, dx,$$

essendo a un arbitrario numero reale strettamente maggiore di 1 in cui f non presenta problemi di definizione.

Essendo f una funzione positiva (il numeratore è un quadrato, l'argomento del log è strettamente maggiore di 1, il termine $(x-1)$ è maggiore di 0 essendo l'integrale definito su $x > 1$), possiamo applicare il criterio del confronto asintotico e cercare una funzione g tale che

$$g(x) \sim f(x) \quad \text{per } x \to 1^+.$$

e studiare il carattere di

$$\int_1^a g(x)\, dx.$$

Per introdurre la $g(x)$ bisogna capire a cosa tendono i vari fattori che costituiscono $f(x)$ quando $x \to 1$.

Il fattore

$$\left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)^2$$

tende a

$$(1 - \cos 1)^2,$$

quantità positiva (e non nulla, visto che il coseno di 1 radiante è diverso da 1), che possiamo denotare con K.
Anche il fattore $\log(1 + x^2)$, tendendo a $\log 2$, non crea problemi.
L'unico fattore problematico è

$$(x - 1)^\alpha.$$

Infatti, come osservato all'inizio, il contenuto della tonda tende a 0.
Siamo in presenza di un caso analogo a

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}\, dx,$$

in cui la singolarità è in $x = 0$.
Nel nostro caso, la x tende a 1 e, chiaramente, il fattore problematico è $(x - 1)^\alpha$. In entrambi i casi, l'argomento della potenza tende a 0.
La discussione del carattere è quindi la medesima. Generalizzando, il carattere di

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \int_0^a \frac{1}{(x - 0)^\alpha}\, dx =$$

è il medesimo di quello di

$$\int_b^a \frac{1}{(x - b)^\alpha}\, dx,$$

a causa del fatto che, per mezzo della sostituzione $x - b = t$, ci si riconduce all'integrale improprio con la singolarità in 0 (nel nostro esercizio è $b = 1$).

Detto ciò, il fattore

$$(x - 1)^\alpha$$

è già in forma adatta per lo studio del carattere.
Quindi, detta

$$g(x) = \frac{K}{\log 2 \cdot (x - 1)^\alpha},$$

si ha che l'integrale

$$\int_1^a g(x)\,dx = \int_1^a \frac{K}{\log 2 \cdot (x-1)^\alpha}\,dx = \frac{K}{\log 2}\int_1^a \frac{1}{(x-1)^\alpha}\,dx$$

converge se e solo se

$$\alpha < 1.$$

Per il criterio del confronto asintotico, anche

$$\int_1^a f(x)\,dx$$

converge se e solo se

$$\alpha < 1.$$

Preoccupiamoci ora del carattere dell'integrale in un intorno di $+\infty$.
Consideriamo il limite dei vari fattori che compongono f quando $x \to +\infty$.
Per quanto riguarda il primo fattore (per il momento omettiamo il quadrato, lo reintrodurremmo quando definiremo $g(x)$), si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) = 1-\cos 0 = 1-1 = 0.$$

Si tratta cioè di un fattore infinitesimo. Nell'introdurre $g(x)$ dovremo sostituire tale fattore o con la parte mancante di un limite notevole o con lo sviluppo di Taylor opportunamente arrestato.
Poiché dal limite notevole si ha

$$1-\cos t \sim \frac{1}{2}t^2 \quad \text{per } t \to 0,$$

segue che, posto $t = \frac{1}{x} \to 0$ quando $x \to +\infty$,

$$1-\cos\frac{1}{x} \sim \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Per quanto riguarda il secondo fattore si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\log(1+x^2) = +\infty.$$

Tendendo a $+\infty$, siamo interessati a tenere l'addendo di ordine più alto nell'argomento del log.
Pertanto sostituiremo tale fattore con

$$\log(x^2) = 2\log x.$$

Infine, poiché

$$\lim_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty,$$

possiamo sostituire la base del terzo fattore con

$$x.$$

La funzione di cui studiare il carattere dell'integrale è dunque

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}{2 \log x \cdot x^\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot x^{4+\alpha} \cdot \log x}.$$

Poiché

$$\int_a^{+\infty} g(x)\, dx = \frac{1}{4} \cdot \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{4+\alpha} \cdot \log x}\, dx$$

converge se e solo se

$$\alpha + 4 > 1,$$

cioè se e solo se

$$\alpha > -3,$$

ne segue che anche

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

converge se e solo se

$$\alpha > -3.$$

In conclusione, l'integrale di partenza converge per tutti e soli gli α per cui converge sia in $x = 1$ che a $+\infty$, cioè per tutti e soli gli α che risolvono il sistema

$$\begin{cases} \alpha < 1 \\ \alpha > -3 \end{cases},$$

cioè per

$$-3 < \alpha < 1.$$