ESERCIZI SUL CALCOLO DI INTEGRALI INDEFINITI E DEFINITI

a cura di Michele Scaglia

RICHIAMI TEORICI

INTEGRALE DEFINITO

Nelle lezioni di teoria è stato ampiamente trattato l'argomento riguardante l'integrazione definita secondo Riemann per *funzioni* reali *limitate* su *intervalli limitati*.
Se ne sono altresì osservati il significato geometrico e le applicazioni concrete.

In questi richiami essenziali, ricordiamo solamente che l'integrale definito di una funzione f su un intervallo $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ è indicato con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

e ci limitiamo a ricordare che nel caso in cui la funzione f sia positiva su $[a, b]$, l'integrale definito di f su $[a, b]$ è numericamente uguale all'area del trapezoide delimitato dal grafico di f, dall'asse x e dalle rette verticali $x = a$ e $x = b$.
Non spendiamo parole sulle interpretazioni geometriche nel caso in cui f sia negativa o di segno non costante.

Ma come calcolare il valore numerico di tale quantità?
Di notevole importanza, come si è visto, è il teorema Fondamentale del Calcolo Integrale che, tra i suoi corollari, ci indica una strada percorribile per il calcolo effettivo di un integrale definito.
Prima, però, ricordiamo cosa si intende per *primitiva* di una assegnata funzione f.

Dato $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, chiamiamo **primitiva di $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{I}$** ogni funzione F derivabile in I e tale che

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I.$$

Chiamiamo cioè *primitiva* di f ogni funzione la cui derivata prima sia uguale alla funzione f.

Si dimostra che tutte le primitive di una assegnata funzione f su un medesimo intervallo I differiscono per una costante additiva.
Ciò significa che, detta F una particolare primitiva di f su I, ogni funzione

$$F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

è ancora una primitiva di f sullo stesso I.

A questo punto possiamo richiamare l'enunciato del

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e x_0 fissato in I.
Sia

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

una sua funzione integrale.

Allora F è derivabile $\forall x \in I$ e si ha

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I,$$

ovvero **ogni funzione integrale di f è una primitiva di f**.

A partire da questo teorema si dimostra un risultato di estrema importanza che viene utilizzato, come già anticipato, nel calcolo degli integrali definiti.

COROLLARIO
Sia f continua su $[a, b]$ e sia G una primitiva di f su $[a, b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a).$$

L'importanza del precedente corollario ci dice quindi come calcolare un integrale definito di una assegnata funzione continua f su un intervallo $[a, b]$: è sufficiente procurarsi una qualsiasi primitiva G di f, valutarla agli estremi dell'intervallo $[a, b]$ e calcolare lo scarto $G(b) - G(a)$.

In forza del teorema Fondamentale del Calcolo Integrale (che, ribadiamo, afferma che una funzione integrale F per f è una primitiva per f), d'ora in poi indicheremo con F una generica primitiva di f.

A causa delle considerazioni precedenti, il vero problema dell'integrazione definita è quindi rappresentato dalla individuazione di una particolare primitiva F per la funzione f.

INTEGRALE INDEFINITO

Vista la questione iniziale che ha aperto la problematica del calcolo delle primitive di una assegnata funzione f, chiameremo **integrale indefinito** di f **l'insieme di tutte le primitive di f**, e lo indicheremo col simbolo

$$\int f(x)\, dx.$$

In formule

$$\int f(x)\, dx := \Big\{ F + c, \quad c \in \mathbb{R} : \quad F \text{ è una primitiva di } f \Big\}.$$

REGOLE DI INTEGRAZIONE

LINEARITÀ

Per ogni f, g integrabili e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, risulta

$$\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]\, dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\, dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)\, dx.$$

Cioè: l'integrale di una combinazione lineare di funzioni è la combinazione lineare degli integrali delle singole funzioni.
In particolare, l'integrale di una somma è la somma degli integrali e le costanti moltiplicative possono essere portate fuori dal segno di integrale.

Osserviamo inoltre che l'integrale del prodotto di due o più funzioni **non** è il prodotto degli integrali delle singole funzioni.

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Sia $\varphi(x)$, $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to J \subseteq \mathbb{R}$ una funzione derivabile su I. Sia $f(y)$, $f : J \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su J e sia $F(y)$ una sua primitiva.
Allora la funzione $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ è integrabile su I e si ha

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx = \int f(y)\, dy = F(y) + c = F(\varphi(x)) + c.$$

Utilizzeremo spesso questo tipo di integrazione per ricondurre l'integrale da calcolare a quello di una funzione elementare o ad un integrale quantomeno più semplice di quello di partenza. L'idea è di chiamare y (noi useremo anche la lettera t) un'opportuna funzione $\varphi(x)$ dell'integranda e riuscire ad individuare all'interno dell'integranda la derivata secondo Leibniz dell'uguaglianza

$$\varphi(x) = y,$$

vale a dire

$$\varphi'(x)\, dx = dy.$$

A questo punto, grazie alla formula, riscriveremo l'integrale originario come

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx = \int f(y)\, dy.$$

Esempio 1.

Si calcoli

$$\int \sin x \cdot \sqrt{3 - \cos x}\, dx.$$

Svolgimento.

Quando si opera una sostituzione è fondamentale individuare una opportuna funzione della quale compaia (o sia possibile far comparire) la derivata all'interno dell'integrale.
Vista la struttura dell'integranda, poniamo, in accordo con le notazioni del teorema,

$$\varphi(x) = 3 - \cos x = y,$$

da cui

$$\varphi'(x)\,dx = 0 + \sin x\,dx = dy,$$

cioè

$$\sin x\,dx = dy.$$

Pertanto, a causa del teorema di sostituzione, l'integrale indefinito diviene

$$\int \sin x \cdot \sqrt{3 - \cos x}\,dx = \int \sqrt{y}\,dx,$$

che è un integrale elementare.
Si ha infatti

$$\int \sqrt{y}\,dy = \int y^{1/2}\,dy = \frac{y^{1/2+1}}{1/2+1} + c = \frac{2}{3}y^{3/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(y)^3} + c.$$

Poiché $y = \varphi(x) = 3 - \cos x$, si trova

$$\int \sin x \cdot \sqrt{3 - \cos x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(3 - \cos x)^3} + c.$$

Esempio 2.

Si calcoli

$$\int \frac{x}{1 + x^4}\,dx.$$

Svolgimento.

Vista la struttura dell'integranda, al cui denominatore compare una somma di quadrati, si intuisce che la sostituzione più adeguata porti all'integrale che dà per risultato un' arctan.
In particolare, scritto

$$\int \frac{x}{1 + (x^2)^2}\,dx,$$

conviene porre

$$\varphi(x) = x^2 = y,$$

da cui, derivando alla Leibniz,

$$2x\,dx = dy.$$

Osserviamo che a numeratore non compare esattamente il fattore $2x\,dx$: tuttavia, grazie alla linearità dell'integrale, è possibile moltiplicare e dividere l'integranda per il fattore 2 e portar fuori il fattore $\frac{1}{2}$. Cioè

$$\int \frac{x}{1+(x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\,dx.$$

Dal teorema di sostituzione troviamo

$$\frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\arctan y + c.$$

Tornando alla variabile x troviamo

$$\int \frac{x}{1+(x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan(x^2) + c.$$

Esempio 3.

Si calcoli l'integrale

$$\int \frac{1}{x(\log x - 2)}\,dx.$$

Conviene riscrivere l'integrale come

$$\int \frac{\frac{1}{x}}{\log x - 2}\,dx.$$

Si intuisce convenga effettuare la sostituzione

$$\varphi(x) = (\log x - 2) = y,$$

da cui, derivando alla Leibniz,

$$\frac{1}{x}\,dx = dy.$$

Pertanto si ha

$$\int \frac{\frac{1}{x}}{\log x - 2}\,dx = \int \frac{dy}{y} = \log|y| + c.$$

Risostituendo y con $(\log x - 2)$, si trova

$$\int \frac{1}{x(\log x - 2)}\,dx = \log|\log x - 2| + c.$$

Esempio 4.

Si calcoli l'integrale

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx.$$

Si tratta di un integrale definito.
Conviene porre $\sqrt{x} = y$. Si trova, derivando alla Leibniz,

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = dy.$$

Occorrerà moltiplicare e dividere per il fattore costante 2.
Poiché l'integrale è definito, conviene trasformare anche gli estremi di integrazione e procedere poi direttamente col calcolo dell'integrale definito nella nuova variabile di integrazione y.
Ricordando che $y = \sqrt{x}$, si trova, essendo $x_0 = 1$ e $x_1 = 4$,

$$y_0 = \sqrt{x_0} = \sqrt{1} = 1, \quad y_1 = \sqrt{x_1} = \sqrt{4} = 2.$$

Pertanto, osservato che da $\sqrt{x} = y$ si ottiene $x = y^2$, risulta

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx = 2 \cdot \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\, dx = 2 \cdot \int_1^2 \frac{1}{1+y^2}\, dy =$$

$$= 2\big[\arctan y\big]_1^2 = 2\,(\arctan 2 - \arctan 1) = 2\left(\arctan 2 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Esempio 5.

Calcolare l'integrale

$$\int \sin(4x)\, dx.$$

Svolgimento.

L'integrale è molto semplice. Tuttavia individuiamo una sostituzione che lo riconduca a un integrale elemenatare. L'idea è di integrare la funzione sin. Conviene quindi porre

$$4x = y,$$

da cui

$$4\, dx = dy.$$

Dobbiamo quindi moltiplicare (e dividere) per il fattore costante 4 la funzione integranda. Si trova

$$\int \sin(4x)\,dx = \frac{1}{4}\int 4\cdot\sin(4x)\,dx = \frac{1}{4}\cdot\int \sin y\,dy = -\frac{1}{4}\cos y + c.$$

Ritornando alla variabile x si trova

$$\int \sin(4x)\,dx = -\frac{1}{4}\cos(4x) + c.$$

Esempio 6.

Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^x}{\cos^2(e^x)}\,dx.$$

Svolgimento.

Poniamo

$$e^x = t,$$

da cui

$$e^x\,dx = dt.$$

Trasformiamo gli estremi di integrazione. Essendo $t = e^x$ ed $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, si trova

$$t_0 = e^{-1}, \quad t_1 = e^0 = 1.$$

L'integrale diviene quindi

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^x}{\cos^2(e^x)}\,dx = \int_{e^{-1}}^{1} \frac{dt}{\cos^2(t)} =$$

$$= [\tan t]_{e^{-1}}^{1} = \tan 1 - \tan\left(e^{-1}\right).$$

Esempio 7.

Si calcoli

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1}\,dx.$$

Svolgimento.

Conviene operare una sostituzione. In accordo con le notazioni del teorema, scegliamo

$$\varphi(x) = e^x = y.$$

Derivando alla Leibniz otteniamo

$$e^x \, dx = dy.$$

Possiamo riscrivere l'integrale nella nuova variabile y. Si ha

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} \, dx = \int \frac{e^x \cdot e^x}{e^x + 1} \, dx = \int \frac{y}{y+1} \, dy.$$

Si tratta ora di calcolare l'integrale

$$\int \frac{y}{y+1} \, dt.$$

Si ha facilmente

$$\int \frac{y}{y+1} \, dy = \int \frac{y+1-1}{y+1} \, dy = \int \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy = y - \log|y+1| + c.$$

Pertanto, tornando alla variabile x, otteniamo

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} \, dx = e^x - \log|e^x + 1| + c$$

Esempio 8.

Si calcoli l'integrale definito

$$\int_0^{1/2} e^{-2x} \cdot \sqrt{e^{-2x} + 3} \, dx.$$

Poiché si intuisce che ci si debba ricondurre alla integrazione di una radice quadrata, la sostituzione che conviene operare è la seguente:

$$e^{-2x} + 3 = y.$$

Derivando alla Leibniz otteniamo

$$-2e^{-2x} \, dx = dy.$$

Trasformiamo gli estremi di integrazione. Da $y = e^{-2x} + 3$ si trova

$$y_0 = e^{-2x_0} + 3 = e^0 + 3 = 4, \qquad y_1 = e^{-2x_1} + 3 = e^{-1} + 3.$$

Pertanto, moltiplicando e dividendo l'integranda per il fattore -2 si trova, per il teorema di sostituzione,

$$\int_0^{1/2} e^{-2x} \cdot \sqrt{e^{-2x}+3}\, dx = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^{1/2} -2e^{-2x}\sqrt{e^{-2x}+3}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \int_4^{e^{-1}+3} \sqrt{y}\, dy = -\frac{1}{2} \int_4^{e^{-1}+3} y^{1/2}\, dy = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left[y^{3/2}\right]_4^{e^{-1}+3} =$$

$$= -\frac{3}{4}\left[(e^{-1}+3)^{3/2} - 4^{3/2}\right] = -\frac{3}{4}\left[(e^{-1}+3)^{3/2} - 8\right].$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

Siano f e g due funzioni derivabili su I. Se $f'(x)g(x)$ è integrabile su I, allora lo è anche $f(x)g'(x)$ e

$$\int f'(x)g(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\, dx.$$

Tale formula di integrazione la si usa solitamente quando l'integranda è data o da un'unica funzione non integrabile immediatamente o dal prodotto di due funzioni (spesso di specie diversa) non gestibili unicamente con qualche sostituzione.

L'idea che sta alla base della regola è la seguente: individuare nel prodotto una funzione semplice da integrare ($f'(x)$) e una funzione da derivare $g(x)$, a patto di non ottenere a secondo membro della formula un integrale più complicato di quello di partenza.
Si può riassumere la formula precedente col seguente schema:

$$\begin{array}{ccc} \textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\ g(x) & & f'(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \nwarrow & \\ g'(x) & \overset{\longleftarrow}{-\int \cdot} & f(x) \end{array}$$

dal quale

$$\int f'(x)g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x)g'(x)\, dx.$$

Esempio.

Si calcoli

$$\int x \cdot e^{2x}\, dx.$$

L'integranda è data dal *prodotto di due funzioni* di specie diversa, x ed e^{2x}, ma tale prodotto non è risolubile per mezzo di una sostituzione in quanto la derivata di $\varphi(x) = e^{2x}$ è $2e^{2x}$, funzione che non compare nell'integranda.

Seguiamo la tecnica di integrazione per parti.
Dobbiamo capire chi siano $f'(x)$ (vale a dire la funzione da integrare) e $g(x)$ (vale a dire la funzione da derivare), avendo come obiettivo principale quello di ottenere a secondo membro un integrale più semplice.
Poiché siamo in grado di integrare e^{2x}, ci conviene integrare tale fattore e derivare x (abbassando così la difficoltà del nuovo integrale).

Nel nostro caso si ha quindi

$$f'(x) = e^{2x}, \qquad g(x) = x.$$

Calcoliamoci da parte

$$f(x) = \int e^{2x}\, dx.$$

Si tratta di un integrale immediato: posto $2x = t$, da cui $2\, dx = dt$, si trova, ponendo $c = 0$,

$$\int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int 2e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} \int e^{t}\, dt = \frac{1}{2}e^{t} = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Siamo pronti per completare lo schema:

$$\begin{array}{ccc} \textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\ x & & e^{2x} \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \nwarrow & \\ 1 & -\overleftarrow{\int} \cdot & \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}$$

Si ha quindi

$$\int x \cdot e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x - \int \frac{1}{2}e^{2x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x - \frac{1}{2} \int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x - \frac{1}{4}e^{2x} + c.$$

CONSIDERAZIONI SU SIMMETRIA DI f E DELL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

Nel calcolo degli integrali definiti può essere comodo sfruttare alcuni risultati riguardanti l'integrazione di funzioni pari o dispari su intervalli simmetrici rispetto allo 0, vale a dire intervalli del tipo $[-a, a]$, $a > 0$.
I risultati che esporremo sono facilmente dimostrabili sfruttando opportunamente il teorema di sostituzione e le proprietà dell'integrale definito.

FUNZIONI PARI

Sia $f : \mathrm{dom} f \to \mathbb{R}$ una funzione **pari**, vale a dire una funzione tale che

$$f(-x) = f(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathrm{dom} f.$$

Allora, per ogni $a \in \mathbb{R}$ tale che $[-a, a] \subseteq \mathrm{dom} f$, si ha

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)\, dx.$$

Cioè, l'integrale di una funzione pari (vale a dire con grafico simmetrico rispetto all'asse y) su un intervallo simmetrico è pari al doppio dell'integrale della medesima f su una delle due metà dell'intervallo (ad esempio, la parte positiva $[0, a]$).
Ciò risulta vantaggioso: infatti, nel calcolo del valore numerico dell'integrale, la possibilità di valutare nell'estremo $x = 0$ può ridurre notevolmente i calcoli.

FUNZIONI DISPARI

Se, invece, $f : \mathrm{dom} f \to \mathbb{R}$ è **dispari**, cioè

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathrm{dom} f,$$

allora, per ogni $a \in \mathbb{R}$ tale che $[-a, a] \subseteq \mathrm{dom} f$, risulta

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$

Senza dimostrare rigorosamente l'affermazione, ce ne si può comunque convincere facilmente ricordando che il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine del sistema di riferimento. Pertanto, pensando al significato geometrico di integrale definito, si verrebbero a creare due aree uguali ma di segno opposto, quindi un integrale complessivamente nullo.

Vediamo un esempio di applicazione di tali considerazioni.

Esempio.

Si calcoli l'integrale definito

$$\int_{-3}^{3} \big(|x| \log(x+4) + x^9 \arctan(x^2+3)\big)\, dx.$$

La simmetria dell'intervallo di integrazione, $[-3, 3]$, fa sperare in qualche semplificazione dei calcoli.

Anzitutto, sfruttando la linearità dell'integrale definito, si ha

$$\int_{-3}^{3} \big(|x| \log(x+4)\, dx + x^9 \arctan(x^2+3)\big)\, dx = \int_{-3}^{3} |x| \log(x+4)\, dx + \int_{-3}^{3} x^9 \arctan(x^2+3)\, dx.$$

Poiché la funzione

$$g(x) = x^9 \arctan(x^2+3)$$

è **dispari**, in quanto

$$g(-x) = (-x)^9 \arctan((-x)^2+3) = -x^9 \arctan(x^2+3) = -g(x),$$

ne segue, per i risultati esposti, che

$$\int_{-3}^{3} x^9 \arctan(x^2+3)\, dx = 0.$$

Pertanto non dobbiamo calcolare tale contributo per l'integrale finale.

L'integrale di partenza diviene

$$\int_{-3}^{3} \big(|x| \log(x+4) + x^9 \arctan(x^2+3)\big)\, dx = \int_{-3}^{3} |x| \log(x+4)\, dx.$$

Quest'ultimo integrale, invece, va calcolato.
Infatti, la funzione

$$|x| \log(x+4)$$

non presenta particolari simmetrie (essendo definita per $x > -4$).
Per calcolare il valore dell'integrale è anzitutto opportuno liberarsi del valore assoluto.
Poiché

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases},$$

si ha

$$f(x) = \begin{cases} -x\log(x+4) & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ x\log(x+4) & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

Pertanto

$$\int_{-3}^{3} |x| \log(x+4)\, dx = \int_{-3}^{0} -x\log(x+4)\, dx + \int_{0}^{3} x\log(x+4)\, dx =$$

$$= -\int_{-3}^{0} x\log(x+4)\, dx + \int_{0}^{3} x\log(x+4)\, dx.$$

Dobbiamo anzitutto procurarci una primitiva di $x\log(x+4)$.
Calcoliamo quindi

$$\int x\log(x+4)\, dx.$$

Tale integrale indefinito lo risolviamo applicando la formula di integrazione per parti.
Deriviamo $\log(x+4)$ e integriamo x.
Si ha

$$\begin{array}{ccc} \textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\ \log(x+4) & & x \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \nwarrow & \\ \dfrac{1}{x+4} & \overset{\longleftarrow}{-\int \cdot} & \dfrac{x^2}{2} \end{array}$$

Per la formula d'integrazione per parti, l'integrale diviene

$$\int x\log(x+4)\, dx = \frac{x^2}{2}\log(x+4) - \int \frac{1}{x+4} \cdot \frac{x^2}{2}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\log(x+4) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+4}\, dx.$$

Risolviamo l'integrale in rosso. Si tratta dell'integrale di una funzione razionale fratta in cui il numeratore ha maggior grado del denominatore. Eseguiamo anzitutto la divisione di polinomi tra numeratore e denominatore.
Risulta

$$
\begin{array}{rrr|rr}
x^2 & +0x & +0 & x & +4 \\
\hline
 & & & & \\
-x^2 & -4x & & x & -4 \\
 & -4x & & & \\
 & 4x & +16 & & \\
 & & +16 & &
\end{array}
$$

L'integrale indefinito diviene

$$\int \left(x - 4 + \frac{16}{x+4} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 4x + 16 \log|x+4| + c.$$

Quindi

$$\int x \log(x+4)\, dx = \frac{x^2}{2} \log(x+4) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - 4x + 16 \log(x+4) \right) + c =$$

$$= \frac{x^2}{2} \log(x+4) - \frac{1}{4} x^2 + 2x - 8 \log(x+4) + c.$$

Tornando all'integrale definito, abbiamo

$$\int_{-3}^{3} f(x)\, dx = -\left[\frac{x^2}{2} \log(x+4) - \frac{1}{4} x^2 + 2x - 8 \log(x+4) \right]_{-3}^{0} +$$

$$+ \left[\frac{x^2}{2} \log(x+4) - \frac{1}{4} x^2 + 2x - 8 \log(x+4) \right]_{0}^{3} =$$

$$= -\left(-8 \log 4 - \left(\frac{9}{2} \log(1) - \frac{9}{4} - 6 - 8 \log 1 \right) \right) + \frac{9}{2} \log 7 - \frac{9}{4} + 6 - 8 \log 7 - (-8 \log 4) =$$

$$= 16 \log 4 - \frac{9}{2} - \frac{7}{2} \log 7.$$

ESERCIZI SVOLTI

1) Si calcoli l'integrale

$$\int \sqrt{1+5\cos^2 x}\,\sin(2x)\,dx.$$

Svolgimento.

Ricordiamo la formula di duplicazione

$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x.$$

Riscriviamo quindi l'integrale come

$$\int \sqrt{1+5\cos^2 x} \cdot (2\sin x \cdot \cos x)\,dx = 2\int \sin x \cdot \cos x \cdot \sqrt{1+5\cos^2 x}\,dx.$$

Conviene procedere con una sostituzione.
Poniamo

$$1+5\cos^2 x = y.$$

Derivando alla Leibniz troviamo

$$-10\cos x \cdot \sin x\,dx = dy.$$

Sarà sufficiente moltiplicare e dividere l'integranda per il fattore costante -10.
Si trova

$$\int \sqrt{1+5\cos^2 x}\,\sin(2x)\,dx = 2\int \sqrt{1+5\cos^2 x} \cdot \sin x \cdot \cos x\,dx =$$

$$= 2\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)\int \sqrt{1+5\cos^2 x} \cdot (-10)\sin x \cdot \cos x\,dx = -\frac{1}{5}\int \sqrt{y}\,dy = -\frac{1}{5}\int y^{1/2}\,dy =$$

$$= -\frac{1}{5}\cdot\frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = -\frac{2}{15}\left(1+5\cos^2 x\right)^{3/2} + c =$$

$$= -\frac{2}{15}\sqrt{\left(1+5\cos^2 x\right)^3} + c.$$

2) Si calcoli l'integrale

$$\int_1^{e^7} \frac{\log(1+\log x)}{x}\,dx.$$

Svolgimento.

La funzione integranda

$$f(x) = \frac{\log(1 + \log x)}{x},$$

è continua sull'intervallo $[1, e^7]$.
Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, possiamo calcolare una primitiva F di f e considerare quindi lo scarto $F(e^7) - F(1)$.

Calcoliamo quindi l'integrale indefinito

$$\int \frac{\log(1 + \log x)}{x}\, dx.$$

Conviene effettuare una sostituzione.
Poniamo

$$\log x = t,$$

da cui otteniamo

$$\frac{1}{x}\, dx = dt.$$

Trasformiamo gli estremi di integrazione. Da $t = \log x$, si trova

$$t_0 = \log x_0 = \log 1 = 0, \qquad t_1 = \log x_1 = \log e^7 = 7.$$

L'integrale diviene quindi

$$\int_1^{e^7} \frac{\log(1 + \log x)}{x}\, dx = \int_0^7 \log(1 + t)\, dt.$$

L'ultimo integrale lo svolgiamo utilizzando la formula di integrazione per parti.
L'integranda è interpretabile infatti come

$$1 \cdot \log(1 + t).$$

Procediamo con la formula:

$$\begin{array}{ccc}
\textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\
\log(1+t) & & 1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
 & \nwarrow & \\
\dfrac{1}{1+t} & \overset{\longleftarrow}{-\int\cdot} & t
\end{array}$$

Si ottiene quindi

$$\int \log(1+t)\, dt = t\log(1+t) - \int \frac{t}{1+t}\, dt.$$

L'integrale evidenziato in rosso è l'integrale di una funzione razionale fratta in cui numeratore e denominatore hanno esattamente lo stesso grado. Effettuando la divisione tra numeratore e denominatore si trova quoziente 1 e resto -1.
Si può riscrivere quindi

$$\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}.$$

Pertanto

$$\int \frac{t}{1+t}\, dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = t - \log|1+t| + c.$$

Quindi (omettendo il valore assoluto a causa di come è definita l'integranda)

$$\int \log(1+t)\, dt = t\log(1+t) - (t - \log(1+t)) =$$

$$= t\log(1+t) - t + \log(1+t) + c = (t+1)\log(1+t) - t + c.$$

Tornando all'integrale definito, si trova, scegliendo la primitiva con $c = 0$,

$$\int_0^7 \log(1+t)\, dt = [(t+1)\log(1+t) - t]_0^7 =$$

$$= (7+1)\log(1+7) - 7 - [(0+1)\log(1+0) - 0] = 8\log 7 - 7.$$

3) Si calcoli l'integrale

$$\int_{2\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{\sin(2x)}{9+\sin^4 x}\, dx.$$

Svolgimento.

L'integranda è continua su tutto $\mathbb{R}$. Calcoliamo quindi una primitiva F dell'integranda e valutiamo poi la quantità $F\left(\frac{5}{2}\pi\right) - F(2\pi)$.

Calcoliamo quindi

$$\int \frac{\sin(2x)}{9+\sin^4 x}\, dx.$$

A causa delle formule di duplicazione del seno si ha immediatamente

$$\int \frac{\sin(2x)}{9+\sin^4 x}\,dx = \int \frac{2\sin x \cdot \cos x}{9+\sin^4 x}\,dx.$$

Essendo $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$, l'integrale riscritto come

$$\int \frac{2\sin x \cdot \cos x}{9+(\sin^2 x)^2}\,dx$$

suggerisce di individuare la derivata della funzione arctan.
Per prima cosa raccogliamo il 9 a denominatore. Si trova

$$\int \frac{2\sin x \cdot \cos x}{9+(\sin^2 x)^2}\,dx = \frac{1}{9}\cdot \int \frac{2\sin x \cdot \cos x}{1+(\frac{\sin^2 x}{3})^2}\,dx.$$

Posto

$$\frac{\sin^2 x}{3} = y,$$

si ha

$$\frac{2}{3}\sin x \cdot \cos x\,dx = dy.$$

Moltiplicheremo e divideremo l'integranda per il fattore $\dfrac{1}{3}$.

Si ha quindi

$$\frac{1}{9}\cdot \int \frac{2\sin x \cdot \cos x}{1+(\frac{\sin^2 x}{3})^2}\,dx = \frac{1}{9}\cdot(3)\cdot \int \frac{\frac{1}{3}\cdot 2\sin x \cdot \cos x}{1+(\frac{\sin^2 x}{3})^2}\,dx = \frac{1}{3}\cdot \int \frac{dy}{1+y^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot \arctan y + c = \frac{1}{3}\cdot \arctan\left(\frac{\sin^2 x}{3}\right) + c.$$

La generica primitiva è dunque

$$F(x) = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{\sin^2 x}{3}\right) + c.$$

Posto (per comodità) $c = 0$, valutiamo $F\left(\dfrac{5}{2}\pi\right) - F(2\pi)$.
Si ha

$$F\left(\frac{5}{2}\pi\right) - F(2\pi) = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{\sin^2\left(\frac{5}{2}\pi\right)}{3}\right) - \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{\sin^2(2\pi)}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\arctan\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\arctan 0 = \frac{1}{3}\arctan\frac{1}{3}.$$

4) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Svolgimento.

L'integranda è continua nell'intervallo di integrazione $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Cominciamo quindi a calcolare una primitiva

$$F(x) = \int \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Conviene vedere l'integranda come segue:

$$f(x) = \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arcsin x = x \cdot (1-x^2)^{-1/2} \cdot \arcsin x.$$

Procediamo con la formula di integrazione per parti, derivando la funzione $\arcsin x$ e integrando la funzione $x \cdot (1-x^2)^{-1/2}$.

L'integrale

$$\int x \cdot (1-x^2)^{-1/2}\, dx$$

è presto calcolato ponendo

$$1 - x^2 = y.$$

Si ricava

$$-2x\, dx = dy.$$

Moltiplicando e dividendo l'integranda per -2 troviamo

$$\int x \cdot (1-x^2)^{-1/2}\, dx = -\frac{1}{2} \cdot \int -2x \cdot (1-x^2)^{-1/2}\, dx = -\frac{1}{2} \cdot \int y^{-1/2}\, dy =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{y^{-1/2+1}}{-1/2+1} + c = -\sqrt{y} + c = -\sqrt{1-x^2} + c.$$

Abbiamo quindi lo schema

$$\begin{array}{ccc} \textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\ \arcsin x & & x \cdot (1-x^2)^{-1/2} \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ & \nwarrow & \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \overleftarrow{-\int \cdot} & -\sqrt{1-x^2} \end{array}$$

da cui

$$F(x) = -\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx =$$

$$= -\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + \int dx = -\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + x + c.$$

Posto $c = 0$ abbiamo che l'integrale definito di partenza vale

$$\int_0^{1/2} \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = -\sqrt{1 - \frac{1}{4}} \arcsin \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \left(-\sqrt{1-0} \cdot \arcsin 0 + 0\right) =$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{12} + \frac{1}{2}.$$

5) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^4 \frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\, dx.$$

Svolgimento.

L'integranda è definita e continua su $[0, +\infty[$ a causa del termine $\sqrt{x}$.
Effettuiamo una sostituzione.Poniamo

$$e^{\sqrt{x}} = t.$$

Derivando alla Leibniz troviamo

$$e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = dt.$$

Inoltre, da $e^{\sqrt{x}} = t$ si ricava

$$\sqrt{x} = \log t.$$

Trasformiamo gli estremi di integrazione:

$$t_0 = e^{\sqrt{x_0}} = e^{\sqrt{0}} = 1, \qquad t_1 = e^{\sqrt{x_1}} = e^{\sqrt{4}} = e^2.$$

Considerando l'integrale di partenza

$$\int_0^4 \frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\,dx.$$

Conviene moltiplicare e dividere (ma restando dentro l'integrale) per i fattori $e^{\sqrt{x}}$ e $2\sqrt{x}$.
Si trova

$$\int_0^4 \frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\,dx = \int_0^4 \frac{2\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}}\cdot \frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\,dx = \int_1^{e^2} \frac{2\cdot \log t}{t^2}\,dt.$$

Calcoliamo quindi una primitiva di

$$\frac{2\log t}{t^2} = (2\log t)\cdot t^{-2}.$$

mediante la formula di integrazione per parti.

In particolare, deriviamo la funzione $2\log t$ e integriamo la funzione t^{-2}.
Si ha lo schema

$$\begin{array}{ccc}
\textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\
2\log t & & t^{-2} \\
\downarrow & & \downarrow \\
 & \nwarrow & \\
\frac{2}{t} & \overset{\longleftarrow}{-\int\cdot} & \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t}
\end{array}$$

Segue quindi

$$\int 2\log t\cdot t^{-2}\,dt = -\frac{2\log t}{t} + \int \frac{2}{t^2}\,dt = -\frac{2\log t}{t} + 2\cdot\int t^{-2}\,dt =$$

$$= -\frac{2\log t}{t} + 2\cdot\frac{t^{-1}}{-1} + c = -\frac{2\log t}{t} - \frac{2}{t} + c.$$

Posto $c = 0$, calcoliamo l'integrale definito valutando la primitiva tra 1 ed e^2. Si ha

$$\int_1^{e^2} \frac{2\log t}{t^2}\,dt = -\frac{2\log e^2}{e^2} - \frac{2}{e^2} - \left[-\frac{2\log 1}{1} - \frac{2}{1}\right] =$$

$$= -\frac{4}{e^2} - \frac{2}{e^2} + 2 = -\frac{6}{e^2} + 2.$$

6) Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 2}\,dx.$$

Svolgimento.

La struttura dell'integranda suggerisce di operare una sostituzione
Poniamo

$$\sqrt[4]{x} = t.$$

Derivando alla Leibniz troviamo

$$\frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{x^3}}\, dx = dt.$$

Moltiplichiamo e dividiamo, restando all'interno del simbolo di integrale, per il fattore $4\sqrt[4]{x^3}$. Si ha, osservando anche che $\sqrt{x} = (\sqrt[4]{x})^2 = t^2$ e che $\sqrt[4]{x^3} = (\sqrt[4]{x})^3 = t^3$,

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 2}\, dx = \int \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{4\sqrt[4]{x^3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 1}\, dx = \int 4t^3 \cdot \frac{1}{2t^2 - 5t + 2}\, dt,$$

cioè

$$\int \frac{4t^3}{2t^2 - 5t + 2}\, dt.$$

Si tratta dell'integrale di una funzione razionale fratta, in cui il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore.
Effettuiamo quindi la divisione di polinomi.

$$\begin{array}{cccc|ccc}
4t^3 & +0t^2 & +0t & +0 & 2t^2 & -5t & +2 \\
\hline
 & & & & & & \\
-4t^3 & +10t^2 & -4t & & 2t & +5 & \\
 & +10t^2 & -4t & & & & \\
 & -10t^2 & +25t & -10 & & & \\
 & & +21t & -10 & & &
\end{array}$$

Ne segue che

$$\frac{4t^3}{2t^2 - 5t + 2} = 2t + 5 + \frac{21t - 10}{2t^2 - 5t + 2}.$$

Pertanto possiamo scrivere

$$\int \frac{4t^3}{2t^2 - 5t + 2}\, dt = \int \left(2t + 5 + \frac{21t - 10}{2t^2 - 5t + 2}\right) dt = t^2 + 5t + \int \frac{21t - 10}{2t^2 - 5t + 2}\, dt.$$

Risolviamo quindi

$$\int \frac{21t - 10}{2t^2 - 5t + 2}\, dt.$$

Si tratta di un integrale di una funzione razionale fratta in cui il numeratore ha grado minore del denominatore.

Controlliamo se il numeratore sia la derivata del denominatore (o facilmente riconducibile ad essa).
La derivata del denominatore è

$$4t-5,$$

non individuabile a numeratore.
Controlliamo se il denominatore è scomponibile in fattori: in tal caso potremmo applicare il metodo dei fratti
Proviamo a scomporre il polinomio di secondo grado che compare a denominatore.
Ricordiamo che, dato il polinomio

$$ax^2+bx+c=0, \quad a,b,c\in\mathbb{R},$$

dette x_1 e x_2 le radici reali dell'equazione associata

$$ax^2+bx+c=0,$$

il polinomio si scompone in

$$a(x-x_1)\cdot(x-x_2).$$

Nel nostro caso, risolviamo

$$2t^2-5t+2=0.$$

Si ha

$$t_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4},$$

da cui

$$t_1=2, \quad t_2=\frac{1}{2}.$$

Pertanto, osservato che $a=2$, risulta

$$2t^2-5t+2=2\cdot(t-2)\cdot\left(t-\frac{1}{2}\right)=(t-2)\cdot(2t-1).$$

Perciò

$$\frac{21t-10}{2t^2-5t+2}=\frac{21t-10}{(t-2)(2t-1)}.$$

Cerchiamo quindi due numeri $A,B\in\mathbb{R}$ tali che

$$\frac{21t-10}{(t-2)(2t-1)}=\frac{A}{t-2}+\frac{B}{2t-1}.$$

Facendo i calcoli a secondo membro otteniamo

$$\frac{A(2t-1)+B(t-2)}{(t-2)(2t-1)} = \frac{2At-A+Bt-2B}{(t-2)(2t-1)} = \frac{t(2A+B)-A-2B}{(t-2)(2t-1)}.$$

Affinché l'ultima frazione coincida con

$$\frac{21t-10}{(t-2)(2t-1)},$$

si deve avere (osservato che il denominatore già coincide), per il principio di identità dei polinomi,

$$\begin{cases} 2A+B=21 \\ -A-2B=-10. \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo

$$B = 21-2A,$$

sostituendo nella seconda troviamo

$$-A-42+4A=-10,$$

da cui

$$A = \frac{32}{3}.$$

Infine, tornando nella prima equazione,

$$B = 21 - \frac{64}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Quindi

$$\frac{21t-10}{(t-2)(2t-1)} = \frac{\frac{32}{3}}{t-2} + \frac{-\frac{1}{3}}{2t-1}.$$

Ne segue che

$$\int \frac{21t-10}{(t-2)(2t-1)}\,dt = \int \frac{\frac{32}{3}}{t-2}\,dt + \int \frac{-\frac{1}{3}}{2t-1}\,dt =$$

$$= \frac{32}{3}\int \frac{1}{t-2}\,dt - \frac{1}{3}\int \frac{1}{2t-1}\,dt = \frac{32}{3}\log|t-2| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2}{2t-1}\,dt =$$

$$= \frac{32}{3}\log|t-2| - \frac{1}{6}\log|2t-1| + c.$$

Tornando all'integrale esteso, abbiamo

$$\int \frac{4t^3}{2t^2-5t+2}\,dt = \int \left(2t+5+\frac{21t-10}{2t^2-5t+2}\right)\,dt = t^2+5t+\frac{32}{3}\log|t-2| - \frac{1}{6}\log|2t-1| + c$$

Per concludere, torniamo alla variabile indipendente x ottenendo

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}-5\sqrt[4]{x}+1}\,dx = \sqrt{x}+5\sqrt[4]{x}+\frac{32}{3}\log\left|\sqrt[4]{x}-2\right| - \frac{1}{6}\log\left|2\sqrt[4]{x}-1\right| + c.$$

7) Si calcoli l'integrale

$$\int x\cdot(\arctan x)^2\,dx.$$

Svolgimento.

L'integranda è il prodotto di due funzioni di specie diversa non riconducibile in maniera ovvia allo sviluppo della derivata di una composta.

Conviene quindi procedere tramite un'integrazione per parti.

Deriviamo la funzione $(\arctan x)^2$ e integriamo la funzione x.
Otteniamo lo schema

$$\begin{array}{ccc}
\textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\
(\arctan x)^2 & & x \\
\downarrow & & \downarrow \\
& \nwarrow & \\
2(\arctan x)\cdot\dfrac{1}{1+x^2} & \overleftarrow{-\int\cdot} & \dfrac{x^2}{2}
\end{array}$$

L'integrale diviene quindi

$$\int x\cdot(\arctan x)^2\,dx = \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,dx.$$

Risolviamo ora l'integrale in rosso applicando nuovamente la formula di integrazione per parti: deriviamo $\arctan x$ e integriamo $\dfrac{x^2}{x^2+1}$.
Si ha

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)\,dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)\,dx = (x - \arctan x).$$

Pertanto, tornando all'integrale in rosso, si ha lo schema:

$$\begin{array}{ccc}
\textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\
\arctan x & & \dfrac{x^2}{x^2+1} \\
\downarrow & & \downarrow \\
& \nwarrow & \\
\dfrac{1}{1+x^2} & \overset{\longleftarrow}{-\int\cdot} & (x - \arctan x)
\end{array}$$

Pertanto

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,dx = (x - \arctan x)\arctan x - \int (x - \arctan x)\cdot\frac{1}{1+x^2} =$$

$$= (x - \arctan x)\arctan x - \int \left(\frac{x}{1+x^2} - \arctan x\cdot\frac{1}{1+x^2}\right) =$$

$$= (x - \arctan x)\arctan x - \int \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2} - (\arctan x)^1\cdot\frac{1}{1+x^2}\right) =$$

$$= (x - \arctan x)\arctan x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \frac{(\arctan x)^2}{2}.$$

Tornando all'integrale iniziale si ha

$$\int x\cdot(\arctan x)^2\,dx = \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \left[(x - \arctan x)\arctan x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \frac{(\arctan x)^2}{2}\right] + c =$$

$$= \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - (x - \arctan x)\arctan x + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \frac{(\arctan x)^2}{2} + c$$

8) Si calcoli l'integrale definito

$$\int_1^2 x \arctan \sqrt{x^2 - 1}\, dx.$$

Svolgimento.

Per calcolare il valore dell'integrale definito dobbiamo calcolare una qualunque primitiva F dell'integranda e valutare la quantità

$$F(2) - F(1).$$

Il problema principale consiste pertanto nella determinazione della primitiva, vale a dire nel calcolo dell'integrale indefinito

$$\int x \arctan \sqrt{x^2 - 1}\, dx.$$

Procediamo dapprima con una sostituzione.
Poniamo

$$\sqrt{x^2 - 1} = t.$$

Elevando al quadrato otteniamo

$$x^2 - 1 = t^2,$$

da cui

$$x^2 = t^2 + 1.$$

Deriviamo alla Leibniz e troviamo

$$2x\, dx = 2t\, dt,$$

ossia

$$x\, dx = t\, dt.$$

Conviene trasformare pure gli estremi di integrazione per procedere così col calcolo dell'integrale definito a partire dalla primitiva nella variabile t.
Poiché $t = \sqrt{x^2 - 1}$, si trova

$$t_0 = \sqrt{(x_0)^2 - 1} = \sqrt{1 - 1} = 0, \qquad t_1 = \sqrt{(x_1)^2 - 1} = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}.$$

L'integrale definito di partenza diviene quindi

$$\int_1^2 x \arctan \sqrt{x^2 - 1}\, dx = \int_0^{\sqrt{3}} t \arctan t\, dt.$$

Calcoliamo quindi la generica primitiva nella variabile indipendente t, determiniamo cioè il valore di

$$\int t \arctan t \, dt.$$

Procediamo integrando per parti. Si ha

$$\begin{array}{ccc} \textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\ \arctan t & & t \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \nwarrow & \\ \dfrac{1}{1+t^2} & \overset{\longleftarrow}{-\int \cdot} & \dfrac{t^2}{2} \end{array}$$

da cui

$$\int t \arctan t \, dt = \frac{t^2}{2} \arctan t - \int \frac{t^2}{2(1+t^2)} \, dt = \frac{t^2}{2} \arctan t - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{(1+t^2)} \, dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} \arctan t - \frac{1}{2} \int \frac{t^2 + 1 - 1}{(1+t^2)} \, dt = \frac{t^2}{2} \arctan t - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} \arctan t - \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \arctan t.$$

Valutiamo ora la primitiva nell'intervallo $[0, \sqrt{3}]$. Si trova

$$\int_0^{\sqrt{3}} t \arctan t \, dt = \frac{3}{2} \arctan \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \arctan \sqrt{3} - \left(0 \arctan 0 - 0 + \frac{1}{2} \arctan 0\right) =$$

$$= 2 \arctan \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

9) Si trovi la primitiva F della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$$

tale che $F(1) = \log(3 - 2\sqrt{2})$.

Svolgimento.

Cominciamo col calcolare la generica primitiva di f, lasciando la costante additiva c di integrazione. Successivamente, imponendo la condizione dettata dal testo dell'esercizio, individueremo la primitiva cercata.

Calcoliamo quindi

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dt.$$

Procediamo con una sostituzione. Poniamo

$$\sqrt{x+1} = t.$$

Elevando al quadrato otteniamo

$$x + 1 = t^2,$$

da cui

$$x = t^2 - 1.$$

Derivando alla Leibniz l'uguaglianza $\sqrt{x+1} = t$, troviamo

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx = dt.$$

Pertanto è sufficiente moltiplicare e dividere per il fattore 2 l'integranda. Si trova

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx = 2 \cdot \int \frac{1}{x \cdot 2\sqrt{x+1}}\,dx = 2 \cdot \int \frac{1}{(t^2-1)}\,dt = \int \frac{2}{t^2-1}\,dt.$$

Dobbiamo quindi calcolare

$$\int \frac{2}{t^2-1}\,dt.$$

Si tratta dell'integrale di una funzione razionale fratta il cui numeratore ha grado più basso del denominatore.
A numeratore non compare la derivata del denominatore, cioè $2t$, quindi procediamo con il metodo dei fratti semplici.

Scomponiamo in fattori il denominatore. Si ha

$$t^2 - 1 = (t-1)(t+1).$$

Cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{2}{t^2-1} = \frac{2}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}.$$

Si ottiene

$$\frac{2}{(t-1)(t+1)} = \frac{A(t+1)+B(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{At+A+Bt-B}{(t-1)(t+1)} =$$

$$= \frac{t(A+B)+A-B}{(t-1)(t+1)}.$$

Affinché la decomposizione della frazione nella somma di quelle due frazioni sia corretta deve necessariamente essere (per il principio di identità dei polinomi)

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=2 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} A=-B \\ -2B=2 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}.$$

Pertanto risulta

$$\frac{2}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}.$$

Quindi

$$\int \frac{2}{t^2-1}\,dt = \int \frac{2}{(t-1)(t+1)}\,dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \log|t-1| - \log|t+1|.$$

Ritornando a x e tenuto conto che $t=\sqrt{x+1}$, otteniamo la generica primitiva

$$F(x) = \int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} = \log\left|\sqrt{x+1}-1\right| - \log\left|\sqrt{x+1}+1\right| + c = \log\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + c.$$

Imponiamo ora la condizione:

$$F(1) = \log(3-2\sqrt{2}).$$

Si ha

$$\log\left|\frac{\sqrt{1+1}-1}{\sqrt{1+1}+1}\right| + c = \log(3-2\sqrt{2}),$$

ossia

$$\log\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right| + c = \log(3-2\sqrt{2}).$$

Razionalizzando l'argomento del logaritmo otteniamo

$$\log\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\right| + c = \log(3-2\sqrt{2}),$$

da cui

$$\log\left|\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}\right| + c = \log(3-2\sqrt{2}),$$

ossia

$$\log(3-2\sqrt{2}) + c = \log(3-2\sqrt{2}),$$

che fornisce

$$c = 0.$$

Pertanto la primitiva cercata è quella che corrisponde alla scelta di $c = 0$, cioè

$$F(x) = \log\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|.$$

10) Si calcoli

$$\int_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\, dx.$$

Svolgimento.

Procediamo con una sostituzione. Poniamo

$$\tan x = t,$$

da cui, derivando alla Leibniz,

$$\left(1+\tan^2 x\right)\, dx = dt.$$

Dovremo moltiplicare e dividere l'integranda (restando però dentro al simbolo di integrale) per la quantità variabile $(1+\tan^2 x)$.
Prima di passare all'integrale, trasformiamo gli estremi di integrazione. Dalla sostituzione $t = \tan x$ si trova

$$t_0 = \tan x_0 = \tan \pi = 0, \qquad t_1 = \tan x_1 = \tan\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \sqrt{3}.$$

Applichiamo ora il teorema di sostituzione. Si ha

$$\int_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,dx = \int_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\cdot\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\,dx =$$

$$= \int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{1-t}{(1+t)(1+t^2)}\,dt.$$

Partiamo col calcolo dell'integrale indefinito

$$\int \frac{1-t}{(t+1)(t^2+1)}\,dt.$$

Si tratta dell'integrale di una funzione razionale fratta con grado del denominatore maggiore del grado del numeratore.

Decomponiamo la frazione attraverso la regola dei fratti semplici.
Il denominatore è già scomposto (e non si può ulteriormente scomporre in quanto la seconda tonda è la somma di due quadrati).

Bisogna trovare $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{-t+1}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1}.$$

Si ha

$$\frac{-t+1}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A(t^2+1)+(Bt+C)(t+1)}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{At^2+A+Bt^2+Bt+Ct+C}{(t+1)(t^2+1)} =$$

$$= \frac{t^2(A+B)+t(B+C)+A+C}{(t+1)(t^2+1)}.$$

Si ha l'uguaglianza sperata se e solo se

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=-1 \\ A+C=1 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} A=-B \\ C=-B-1 \\ -B-B-1=1 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}.$$

Pertanto

$$\frac{-t+1}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{1}{t+1} + \frac{-t}{t^2+1}.$$

Ne segue che

$$\int \frac{-t+1}{(t+1)(t^2+1)}\,dt = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{t}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= \log|t+1| - \int \frac{t}{t^2+1}\,dt = \log|t+1| - \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1} =$$

$$= \log|t+1| - \frac{1}{2}\log|t^2+1| + c.$$

Possiamo calcolare l'integrale definito valutando la primitiva (nella variabile t) nell'intervallo $[0, \sqrt{3}]$. Si trova

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1-t}{(1+t)(1+t^2)}\,dt = \log\left|\sqrt{3}+1\right| - \frac{1}{2}\log\left|(\sqrt{3})^2+1\right| - \left(log 1 - \frac{1}{2}\log 1\right) =$$

$$= \log\left(\sqrt{3}+1\right) - \frac{1}{2}\log 4 = \log\left(\sqrt{3}+1\right) - \log 2 = \log\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

11) Si calcoli il valore dell'integrale

$$\int_{\log 2}^{7} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}\,dx.$$

Svolgimento.

L'integranda è continua sull'intervallo $[\log 2, 7]$.
Dobbiamo procurarci una primitiva della funzione data, calcolare cioè

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}\,dx.$$

La presenza di una radice quadrata e di funzioni della stessa specie suggeriscono di effettuare una sostituzione. Si potrebbe porre dapprima $e^x = t$ e, successivamente, operando un'ulteriore sostituzione, porre $\sqrt{t-1} = y$.
Procediamo diversamente, effettuando un'unica sostituzione (visto che il radicando non ha un'espressione analitica particolarmente elaborata).

Poniamo quindi

$$\sqrt{e^x - 1} = t,$$

da cui

$$\frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}\, dx = dt.$$

Trasformiamo anche gli estremi di integrazione. Da $t = \sqrt{e^x - 1}$ si ricava

$$t_0 = \sqrt{e^{x_0} - 1} = \sqrt{e^{\log 2} - 1} = \sqrt{2 - 1} = 1, \qquad t_1 = \sqrt{e^{x_1} - 1} = \sqrt{e^7 - 1}.$$

Poiché da $\sqrt{e^x - 1} = t$ si trova $e^x = t^2 + 1$ ed essendo inoltre $e^{2x} = e^x \cdot e^x$, si trova

$$\int_{\log 2}^{7} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}}\, dx = 2 \cdot \int_{\log 2}^{7} \frac{e^x \cdot e^x}{2 \cdot \sqrt{e^x - 1}}\, dx =$$

$$= 2 \cdot \int_{1}^{\sqrt{e^7 - 1}} (t^2 + 1)\, dt = 2 \cdot \left[\frac{t^3}{3} + t + c\right]_1^{\sqrt{e^7 - 1}} =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{(e^7 - 1)^3}}{3} + \sqrt{e^7 - 1}\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + 1\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{(e^7 - 1)^3}}{3} + \sqrt{e^7 - 1}\right) - \frac{8}{3}.$$

12) Si calcoli l'integrale definito

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x^3 - x) e^{|1 - x^2|}\, dx.$$

Svolgimento.

Per prima cosa eliminiamo il valore assoluto studiando il segno del suo argomento. Si ha

$$\text{argomento } \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x^2 \geq 0,$$

da cui

$$x^2 - 1 \leq 0.$$

Risolvendo l'equazione associata si trovano le radici

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

Pertanto l'argomento è positivo per

$$-1 \leq x \leq 1.$$

La funzione da integrare è pertanto

$$f(x) = \begin{cases} (x^3 - x)e^{1-x^2} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ (x^3 - x)e^{x^2-1} & \text{se } x < -1 \ \text{ o } \ x > 1 \end{cases}.$$

In particolare, pensando all'integrale definito da studiare, osservando che $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$, si ha

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x^3 - x)e^{|1-x^2|}\, dx = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} (x^3 - x)e^{(1-x^2)}\, dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} (x^3 - x)e^{(x^2-1)}\, dx.$$

Chiamiamo

$$I_1 := \int_{1/\sqrt{2}}^{1} (x^3 - x)e^{(1-x^2)}\, dx \quad \text{e} \quad I_2 := \int_{1}^{\sqrt{2}} (x^3 - x)e^{(x^2-1)}\, dx.$$

Comiciamo a calcolare

$$I_1 = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} (x^3 - x)e^{(1-x^2)}\, dx.$$

Ci conviene riscriverlo come

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} (x^3 - x)e^{(1-x^2)}\, dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} x(x^2-1)e^{1-x^2}\, dx = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} x(1-x^2)e^{1-x^2}\, dx.$$

Cominciamo a fare una sostituzione: poniamo

$$1 - x^2 = t,$$

da cui, derivando alla Leibniz, troviamo

$$-2x\, dx = dt.$$

Trasformiamo gli estremi di integrazione:

$$t_0 = 1 - x_0^2 = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \qquad t_1 = 1 - x_1^2 = 1 - 1 = 0.$$

Si trova quindi

$$-\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} x(1-x^2)e^{1-x^2}\, dx = -\left(-\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} -2x(1-x^2)e^{1-x^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{0} t \cdot e^t \, dt.$$

Calcoliamo una primitiva di $t \cdot e^t$ applicando la formula di integrazione per parti. Risulta

$$\begin{array}{ccc} \textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\ t & & e^t \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \nwarrow & \\ & \longleftarrow & \\ 1 & -\int \cdot & e^t \end{array} ,$$

da cui

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{0} te^t \, dt = \frac{1}{2}\left(te^t - \int e^t \, dt\right)_{1/2}^{0} = \frac{1}{2}\left[e^t(t-1)\right]_{\frac{1}{2}}^{0} =$$

$$= \frac{1}{2}e^0(0-1) - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-1\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{e},$$

cioè

$$I_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{e}.$$

Calcoliamo ora

$$I_2 = \int_1^{\sqrt{2}} (x^3 - x)e^{(x^2-1)} \, dx = \int_1^{\sqrt{2}} x(x^2-1)e^{x^2-1} \, dx.$$

Posto, come prima,

$$x^2 - 1 = t,$$

si trova

$$2x \, dx = dt.$$

Gli estremi divengono

$$t_0 = x_0^2 - 1 = 1 - 1 = 0, \qquad t_1 = x_1^2 - 1 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Si ha quindi

$$I_2 = \int_1^{\sqrt{2}} x(x^2-1)e^{x^2-1} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2-1)e^{x^2-1} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 t \cdot e^t \, dt.$$

Sfruttando i calcoli per I_1, si trova immediatamente

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 t \cdot e^t \, dt = \frac{1}{2} \cdot \left[e^t(t-1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}e(1-1) - \frac{1}{2}e^0(0-1) = \frac{1}{2}.$$

In definitiva l'integrale iniziale vale

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x^3 - x)e^{|1-x^2|} \, dx = I_1 + I_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{1/2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}e^{1/2}.$$

[T.E. 26/06/2015]

13) Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{7x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Svolgimento.

Conviene effettuare una sostituzione. In particolare, la presenza del fattore $\sqrt{1-x^2}$ al denominatore fa pensare alla funzione arcsin.
Poniamo quindi

$$\arcsin x = t,$$

da cui

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = dt.$$

Trasformiamo gli estremi di integrazione. Si ha

$$t_0 = \arcsin x_0 = \arcsin 0 = 0, \qquad t_1 = \arcsin x_1 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Poiché da $\arcsin x = t$, si trova $x = \sin t$, l'integrale definito di partenza diviene

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 7x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 7\sin^3 t \, dt.$$

Si tratta quindi di calcolare l'integrale definito

$$7 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 t = 7 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t \cdot \sin t \, dt = 7 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(1 - \cos^2 t\right) \cdot \sin t \, dt.$$

Conviene operare un'ulteriore sostituzione:

$$\cos t = y,$$

da cui

$$\sin t\, dt = dy.$$

Gli estremi divengono

$$y_0 = \cos t_0 = \cos 0 = 1, \qquad y_1 = \cos t_1 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si trova quindi

$$7 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(1 - \cos^2 t\right) \cdot \sin t\, dt = -7 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(1 - \cos^2 t\right) \cdot (-\sin t)\; dt =$$

$$= -7 \cdot \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(1 - y^2\right)\; dy = -7 \cdot \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -7\left[y\left(1 - \frac{y^2}{3}\right)\right]_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= -7\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\right)\right] + 7\left[1\left(1 - \frac{1}{3}\right)\right] =$$

$$= -\frac{7}{8}\cdot 3\sqrt{3} + 7\cdot\frac{2}{3} = 7\cdot\left(-\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{2}{3}\right).$$

14) Si calcoli l'integrale definito

$$\int_0^{\log 4} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{8e^{-x} + 1}\, dx.$$

Svolgimento.

Riscriviamo anzitutto l'integrale come

$$\int_0^{\log 4} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{8e^{-x} + 1}\, dx = \int_0^{\log 4} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{\dfrac{8}{e^x} + 1}\, dx = \int_0^{\log 4} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{\dfrac{8 + e^x}{e^x}}\, dx =$$

$$= \int_0^{\log 4} \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x - 1}}{8 + e^x}\, dx.$$

Poniamo

$$\sqrt{e^x - 1} = t,$$

da cui

$$\frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}\, dx = dt.$$

Dovremo quindi moltiplicare e dividere, restando dentro al simbolo di integrale, per il fattore $2\sqrt{e^x - 1}$.

Cambiamo gli estremi di integrazione. Troviamo

$$t_0 = \sqrt{e^{t_0} - 1} = \sqrt{e^0 - 1} = 0, \qquad t_1 = \sqrt{e^{t_1} - 1} = \sqrt{e^{\log 4} - 1} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}.$$

Osservato infine che, da $\sqrt{e^x - 1} = t$ si trova $e^x - 1 = t^2$ da cui $e^x = 1 + t^2$, si ottiene che

$$\int_0^{\log 4} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{8 + e^x}\, dx = 2 \cdot \int_0^{\log 4} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1} \cdot \sqrt{e^x - 1}}{2\sqrt{e^x - 1} \cdot 8 + e^x}\, dx = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{8 + t^2 + 1}\, dt =$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{t^2 + 9}\, dt.$$

Si tratta dell'integrale definito di una funzione razionale fratta in cui il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore. Pertanto si dovrebbe procedere con la divisione di polinomi. Tuttavia, in questo caso, la decomposizione della frazione la si può effettuare aggiungendo e togliendo 9 al numeratore.

Risulta

$$2 \int \frac{t^2}{t^2 + 9}\, dt = 2 \int \frac{t^2 + 9 - 9}{t^2 + 9}\, dt = 2 \int \left(1 - \frac{9}{t^2 + 9}\right) dt = 2t - 18 \int \frac{1}{t^2 + 9}\, dt.$$

Calcoliamo da parte

$$\int \frac{1}{t^2 + 9}\, dt.$$

Osserviamo che il denominatore non è scomponibile in fattori (in quanto somma di due quantità positive di cui una è un numero).
Dobbiamo cercare quindi di ricondurci alla derivata dell'arctan f ricordando che

$$(\arctan f)' = \frac{f'}{1 + f^2}.$$

Cominciamo a raccogliere 9 a denominatore per avere come primo addendo il numero 1. Si ha

$$\int \frac{1}{t^2 + 9}\, dt = \int \frac{1}{9 \cdot \left(1 + \frac{t^2}{9}\right)}\, dt = \frac{1}{9} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{3}\right)^2}\, dt.$$

L'integrale è proprio del tipo

$$\int \frac{f'}{1 + f^2},$$

essendo

$$f(t) = \frac{t}{3}.$$

Poiché

$$f'(t) = \left(\frac{t}{3}\right)' = \left(\frac{1}{3} \cdot t\right)' = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3},$$

dobbiamo moltiplicare e dividere l'integranda per il fattore $\frac{1}{3}$ per poter così integrare. Si ottiene

$$\int \frac{1}{t^2+9}\, dt = \frac{1}{9} \cdot 3 \int \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{t}{3}\right)^2}\, dt = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{t}{3}\right).$$

Tornando all'integrale otteniamo

$$2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{t^2+9}\, dt = \left[2t - 18\int \frac{1}{t^2+9}\, dt\right]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \left[2t - 18 \cdot \left(\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{t}{3}\right)\right)\right]_0^{\sqrt{3}} = \left[2t - 6 \arctan\left(\frac{t}{3}\right)\right]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \left[2\sqrt{3} - 6 \arctan\frac{\sqrt{3}}{3} - (0 - 6 \arctan 0)\right] = 2\sqrt{3} - 6 \cdot \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3} - \pi.$$

[T.E. 06/02/2014]

15) Calcolare la media integrale della funzione

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

sull'intervallo $[\log 2, \log 3]$.

Svolgimento.

Data una funzione f limitata su un intervallo $[a, b]$, chiamiamo media integrale di f la quantità

$$\frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b-a}.$$

Nel nostro esercizio dobbiamo quindi calcolare

$$\frac{\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{1}{e^x-1}\, dx}{\log 3 - \log 2} = \frac{\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{1}{e^x-1}\, dx}{\log \frac{3}{2}}.$$

Si tratta di determinare il valore dell'integrale definito

$$\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{1}{e^x - 1}\, dx,$$

per risolvere il quale è opportuno effettuare una sostituzione. Poniamo $e^x = t$, da cui

$$e^x\, dx = dt.$$

Per quanto riguarda gli estremi, essi divengono

$$t_0 = e^{x_0} = e^{\log 2} = 2, \qquad t_1 = e^{x_1} = e^{\log 3} = 3.$$

Moltiplichiamo e dividiamo restando dentro al simbolo di integrale per il fattore e^x. Si ha

$$\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{1}{e^x - 1}\, dx = \int_{\log 2}^{\log 3} \frac{1}{e^x - 1} \cdot \frac{e^x}{e^x}\, dx =$$

$$\int_2^3 \frac{1}{t(t-1)}\, dt.$$

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{t(t-1)}\, dt$$

attraverso il metodo dei fratti semplici.
Cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1}.$$

Svolgendo i calcoli si trova

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A(t-1) + Bt}{t(t-1)} = \frac{t(A+B) - A}{t(t-1)}.$$

Affinché

$$\frac{t(A+B) - A}{t(t-1)} = \frac{1}{t(t-1)} = \frac{1 + 0t}{t(t-1)}$$

deve essere

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A = 1 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}.$$

Pertanto si ha

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{-1}{t} + \frac{1}{t-1},$$

da cui, per la linearità dell'integrale,

$$\int \frac{1}{t(t-1)}\,dt = \int \frac{-1}{t}\,dt + \int \frac{1}{t-1},dt = -\log|t| + \log|t-1| + c = \log\left|\frac{t-1}{t}\right| + c.$$

Passando all'integrale definito si ha, scelto $c = 0$,

$$\int_2^3 \frac{1}{t(t-1)}\,dt = \left[\log\left|\frac{t-1}{t}\right|\right]_2^3 = \log\frac{2}{3} - \log\frac{1}{2} = \log\left(\frac{2}{3}\cdot 2\right) = \log\frac{4}{3}.$$

In definitiva la media integrale cercata è

$$\frac{\displaystyle\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{1}{e^x-1}\,dx}{\log\frac{3}{2}} = \frac{\log\dfrac{4}{3}}{\log\frac{3}{2}}.$$

16) Si calcoli l'integrale definito

$$\int_{\log\sqrt{2}}^{\log\sqrt{5}} \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx.$$

Svolgimento.

Vista la struttura dell'integranda, conviene partire con una sostituzione.
Poniamo

$$\sqrt{e^{2x}-1} = t.$$

Derivando alla Leibniz si trova

$$\frac{1}{2\sqrt{e^{2x}-1}}\cdot 2e^{2x}\,dx = dt,$$

cioè

$$\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = dt.$$

Trasformiamo gli estremi di integrazione.
Si trova

$$t_0 = \sqrt{e^{2x_0}-1} = \sqrt{e^{2\log\sqrt{2}}-1} = \sqrt{e^{\log(\sqrt{2})^2}-1} = \sqrt{2-1} = 1,$$

$$t_0 = \sqrt{e^{2x_1}-1} = \sqrt{e^{2\log\sqrt{5}}-1} = \sqrt{e^{\log(\sqrt{5})^2}-1} = \sqrt{5-1} = 2,.$$

Osserviamo infine che da $\sqrt{e^{2x}-1}=t$ si ricava

$$e^{2x}=t^2+1,$$

vale a dire

$$2x=\log(t^2+1),$$

da cui

$$x=\frac{1}{2}\log(t^2+1).$$

L'integrale definito di partenza si trasforma come segue grazie al teorema di sostituzione:

$$\int_{\log\sqrt{2}}^{\log\sqrt{5}} \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = \int_{\log\sqrt{2}}^{\log\sqrt{5}} \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{2}\log(t^2+1)\,dt =$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2 \log(t^2+1)\,dt.$$

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\frac{1}{2}\int \log(t^2+1)\,dt.$$

Lo risolviamo utilizzando la formula d'integrazione per parti. In particolare deriviamo la funzione $\log(t^2+1)$ e integriamo la funzione 1.
Si ha

$$\begin{array}{ccc}
\textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\
\log(t^2+1) & & 1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
 & \nwarrow & \\
\dfrac{2t}{t^2+1} & \overleftarrow{-\int\cdot} & t
\end{array}$$

Pertanto

$$\frac{1}{2}\int \log(t^2+1)\,dt = \frac{1}{2}\cdot\left(t\log(t^2+1)-\int\frac{2t}{t^2+1}\cdot t\,dt\right) = \frac{1}{2}t\log(t^2+1)-\int\frac{t^2}{t^2+1}\,dt.$$

Calcoliamo

$$\int\frac{t^2}{t^2+1}\,dt.$$

Risulta

$$\int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt = \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)\,dt = t - \arctan t.$$

Pertanto

$$\frac{1}{2}\int \log(t^2+1)\,dt = \frac{1}{2}t\log(t^2+1) - \int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}t\log(t^2+1) - (t - \arctan t) =$$

$$= \frac{1}{2}t\log(t^2+1) - t + \arctan t.$$

Possiamo ora calcolare l'integrale definito tra 1 e 2: si ha

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \log(t^2+1)\,dt = \left[\frac{1}{2}t\log(t^2+1) - t + \arctan t\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\log 5 - 2 + \arctan 2 - \left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\log 2 - 1 + \arctan 1\right) =$$

$$= \log 5 - \frac{1}{2}\log 2 - 3 + \arctan 2 - \frac{\pi}{4} = \log\frac{5}{\sqrt{2}} - 3 + \arctan 2 - \frac{\pi}{4}.$$

17) Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}.$$

Svolgimento.

La funzione integranda è del tipo

$$f(x) = f(\cos x, \sin x).$$

Verrebbe spontanea una sostituzione di tipo trigonometrico. La più semplice che viene in mente è una delle due seguenti:

$$\cos x = t \qquad \text{oppure} \qquad \sin x = t.$$

Tuttavia una tale sostituzione complicherebbe la struttura dell'integranda.
Consideriamo ad esempio

$$\cos x = t.$$

Se deriviamo alla Leibniz troviamo

$$\sin x\, dx = dt.$$

Moltiplicando e dividendo l'integranda per il fattore $\sin x$, non riusciamo comunque a gestire l'integrale che si ottiene:

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\cdot\frac{-\sin x}{-\sin x}\, dx,$$

in quanto occorrerebbe saper esprimere $\sin x$ per mezzo della nuova variabile t, vale a dire $\cos x$. Dalla relazione fondamentale della goniometria sappiamo che

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x,$$

da cui

$$\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}.$$

Sarebbe necessario quindi conoscere su quale intervallo calcolare la primitiva, ma non solo: supponiamo, per semplicità, di scrivere $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$, cioè di restringerci a $[0,\pi]$, l'integrale diverrebbe

$$\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\cdot\frac{-\sin x}{-\sin x}\, dx = -\int \frac{1}{1+\sqrt{1-\cos^2 x}+\cos x}\cdot\frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\, dx =$$

$$= -\int \frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}+t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

Il calcolo dell'ultimo integrale appare alquanto laborioso (ammesso che si possa risolvere attraverso funzioni elementari).
Ne segue che la sostituzione $\cos x = t$ (e, analogamente, $\sin x = t$) non appare la più adeguata.

In casi come questi (nei quali l'integranda è costituita dalla somma di termini in sin e cos di primo grado) può essere talvolta utile effettuare una sostituzione (sempre di tipo goniometrico) che faccia riferimento alle cosiddette formule parametriche razionali:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \text{essendo} \qquad t = \tan\frac{x}{2}.$$

Sono formule valide per ogni $x \neq \pi + 2k\pi$ che consentono di esprimere il seno e il coseno di un angolo x tramite la tangente dell'angolo dimezzato $\frac{x}{2}$, vale a dire $\tan\frac{x}{2}$, espressa più sinteticamente con t.

Applichiamo tali formule al nostro integrale, vale a dire

$$\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\, dx.$$

Poniamo

$$t = \tan\frac{x}{2}.$$

Può essere utile invertire la funzione tan. Si ottiene

$$\frac{x}{2} = \arctan t,$$

da cui

$$x = 2 \arctan t$$

che, derivata alla Leibniz, dà

$$dx = 2 \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt.$$

Già sappiamo esprimere $\sin x$ e $\cos x$ in funzione di t: si ha infatti

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Risulta quindi

$$\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\, dx = \int \frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt =$$

$$= 2\int \frac{1}{\dfrac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt = 2\int \frac{1+t^2}{2t+2} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt =$$

$$= 2\int \frac{1}{2(t+1)}\, dt = \int \frac{1}{t+1}\, dt,$$

immediatamente risolvibile.
Infatti

$$\int \frac{1}{t+1}\, dt = \log|t+1|,$$

da cui

$$\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\, dx = \log\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + c.$$

18) Data la funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{x+1}{x(1+xe^x)},$$

se ne calcoli la primitiva F tale che

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0.$$

Svolgimento.

Calcoleremo anzitutto la generica primitiva di f, vale a dire

$$\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}\, dx,$$

lasciando indicata la generica costante additiva d'integrazione $c \in \mathbb{R}$.
In seguito troveremo il paricolare valore da attribuire a $c \in \mathbb{R}$ affinché si ottenga la primitiva F che obbedisce alla richiesta dettata dal testo.

Comiciamo quindi a calcolare l'integrale indefinito.
Conviene fare una sostituzione: poniamo

$$1 + xe^x = t. \tag{1}$$

Deriviamo alla Leibniz e troviamo
da cui

$$(e^x + xe^x)\, dx = dt,$$

vale a dire

$$e^x(1+x)\, dx = dt.$$

Ci accorgiamo che il fattore $(1+x)$ compare proprio nell'integranda. Manca però il fattore e^x: in questo caso moltiplichiamo e dividiamo l'integranda per il fattore mancante e^x (non nullo). Osserviamo che questa operazione (che abbiamo già effettuato più volte) è del tutto lecita, in quanto si sta moltiplicando e dividendo per una quantità dipendente dalla variabile x all'interno del simbolo di integrale. Non sarebbe invece lecito moltiplicare all'interno dell'integrale e dividere all'esterno per un fattore variabile (ossia, come si è soliti dire, non è lecito portare fuori dall'integrale un fattore dipendente da x. È invece lecito farlo, grazie ai teoremi di linearità, con costanti moltiplicative, pertanto indipendenti da x).
Riscriviamo quindi l'integrale come

$$\int \frac{e^x \cdot (x+1)}{e^x \cdot x(1+xe^x)}\, dx.$$

Per poter ultimare la sostituzione è necessario sapere esprimere in funzione di t anche il nuovo fattore che compare a denominatore, vale a dire xe^x.

In realtà è possibile ricavare la sua espressione sfruttando nuovamente la (1): si ricava immediatamente

$$xe^x = t - 1.$$

Siamo pronti a riscrivere l'integrale nella nuova variabile t. Si ha

$$\int \frac{e^x \cdot (x+1)}{e^x \cdot x(1+xe^x)}\, dx = \int \frac{dt}{(t-1)t} = \int \frac{1}{t(t-1)}\, dt.$$

Quest'ultimo integrale lo risolviamo col metodo dei fratti (trattandosi di una razionale fratta il cui denominatore è già decomposto in fattori irriducibili).

Cerchiamo quindi $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1}.$$

Si deve avere

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{At - A + Bt}{t(t-1)} = \frac{t(A+B) - A}{t(t-1)}.$$

L'uguaglianza sussiste se e solo se

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A = 1 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}.$$

Pertanto si ha

$$\int \frac{1}{t(t-1)}\, dt = \int \left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{t-1}\right) dt = -\log|t| + \log|t-1| = \log\left|\frac{t-1}{t}\right|.$$

Quindi

$$\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}\, dx = \log\left|\frac{1+xe^x-1}{1+xe^x}\right| + c = \log\left|\frac{xe^x}{xe^x+1}\right| + c.$$

Adesso dobbiamo individuare la particolare primitiva F tale che

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$

Calcoliamo quindi tale limite per la generica primitiva. Impostando il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\log\left|\frac{xe^x}{xe^x+1}\right| + c\right),$$

ci si accorge che l'argomento del log si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$
D'altra parte sia a numeratore che a denominatore vi è lo stesso fattore che tende all'infinito, vale a dire xe^x.
Cioè
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{xe^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{xe^x\cdot\left(1+\dfrac{1}{xe^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{xe^x}}=1.$$

Pertanto l'argomento del log tende a 1.
Quindi
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\log\left|\frac{xe^x}{xe^x+1}\right|+c\right)=[\log 1+c]=[0+c]=c.$$

Affinche valga l'uguaglianza richiesta si deve avere
$$c=0.$$

Per ottenere la primitiva desiderata si deve quindi sostituire $c=0$ nell'espressione della generica primitiva. Si trova
$$F(x)=\log\left|\frac{xe^x}{xe^x+1}\right|=\log\left(\frac{xe^x}{xe^x+1}\right),$$

dove l'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che la funzione f di cui si è cercata la primitiva è definita per $x>0$, quindi numeratore e denominatore sono positivi.

19) Si calcoli l'integrale definito
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2\left(x+|x|\right)\,dx.$$

Svolgimento.

Si tratta di un integrale definito.

Per prima cosa spezziamo il valore assoluto, studiando il segno dell'argomento.

Si ha
$$\arg\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\geq 0.$$

Pertanto la funzione diviene
$$f(x)=\begin{cases} x\sin^2(x-x) & \text{se } x<0\\ x\sin^2(x+x) & \text{se } x\geq 0\end{cases},$$

cioè

$$f(x) = \begin{cases} x\sin^2(0) & \text{se } x < 0 \\ x\sin^2(2x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases},$$

ossia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x\sin^2(2x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Quindi, per quanto riguarda l'integrale definito di partenza, si ha

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2\left(x + |x|\right)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2(2x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2(2x)\,dx.$$

Pertanto dobbiamo calcolare solo il secondo integrale.

Cominciamo a procurarci una primitiva di $x\sin^2(2x)$; calcoliamo cioè

$$\int x\sin^2(2x)\,dx.$$

Lo risolviamo applicando la formula di integrazione per parti, in quanto l'integranda è data dal prodotto di due funzioni di specie diverse e tale prodotto non è facilmente riconducibile allo sviluppo della derivata di una funzione composta.

Deriviamo x e integriamo $\sin^2(2x)$.
Calcoliamoci da parte

$$\int \sin^2(2x)\,dx.$$

Per risolvere questo integrale facciamo riferimento alle formule di bisezione della goniometria. Ricordiamo che, per ogni angolo x, si ha

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}, \qquad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

Tali formule permettono di esprimere le funzioni goniometriche di un angolo dimezzato attraverso le funzioni goniometriche dell'angolo non dimezzato. O equivalentemente, permettono di scrivere le funzioni goniometriche di un angolo attraverso le funzioni goniometriche dell'angolo doppio.
In particolare, scriviamole per l'angolo x, pensando

$$x = \frac{2x}{2}.$$

Si ha

$$\sin x = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}, \qquad \cos x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}.$$

In maniera analoga

$$\sin 2x = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 4x}{2}}, \qquad \cos 2x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 4x}{2}}.$$

e così via... Sotto radice deve sempre comparire il doppio dell'angolo a primo membro dell'uguaglianza.

Tornando al nostro integrale, osserviamo che l'integranda è

$$\sin^2(2x).$$

Per le precedenti formule si ha

$$\sin^2(2x) = \left(\pm\sqrt{\frac{1-\cos 4x}{2}}\right)^2 = \frac{1-\cos 4x}{2}.$$

Pertanto si ha

$$\int \sin^2(2x)\,dx = \int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4x}{2}\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos 4x\,dx.$$

Per quanto riguarda l'integrale

$$\int \cos 4x\,dx,$$

si tratta di un integrale presto risolto ponendo $4x = y$, da cui $4\,dx = dy$. Risulta, moltiplicando e dividendo per la costante moltiplicativa 4,

$$\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\int 4\cdot\cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\int \cos y\,dy = \frac{1}{4}\sin y + c = \frac{1}{4}\sin 4x + c.$$

Pertanto, scelto $c = 0$, si ha

$$\int \sin^2(2x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin(4x) =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x).$$

Siamo pronti ad impostare lo schema dell'integrazione per parti per l'integrale originario

$$\int x\sin^2(2x)\,dx$$

Abbiamo

$$
\begin{array}{ccc}
\textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\
x & & \cos^2(2x) \\
\downarrow & & \downarrow \\
 & \nwarrow & \\
1 & \overset{\longleftarrow}{-\int\cdot} & \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x)
\end{array}
$$

L'integrale diviene quindi

$$\int x\sin^2(2x)\,dx = x\cdot\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x)\right) - \int\cdot\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x)\right)\,dx$$

$$= x\cdot\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x)\right) - \frac{1}{2}\int x\,dx + \frac{1}{8}\int \sin(4x)\,dx =$$

$$= x\cdot\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x)\right) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\int 4\cdot\sin(4x)\,dx =$$

$$= x\cdot\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x)\right) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{32}\cos(4x) + c.$$

Detta F una particolare primitiva, ad esempio quella che corrisponde a $c = 0$, si ha

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2\left(x + |x|\right)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2(2x)\,dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) =$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}\sin(2\pi)\right) - \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{32}\cos(2\pi) - 0 + \frac{1}{32}\cos 0 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16}.$$

20) Si calcoli l'integrale definito

$$\int_0^{\sqrt{e}} x^3\log\sqrt{e + x^2}\,dx.$$

Svolgimento.

Conviene anzitutto sfruttare la proprietà dei logaritmi $\log_a x^m = m \cdot \log_a x$ e scrivere:

$$\int_0^{\sqrt{e}} x^3 \log\sqrt{e+x^2}\, dx = \int_0^{\sqrt{e}} x^3 \log\left(e+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\, dx = \int_0^{\sqrt{e}} \frac{1}{2}x^3 \log\left(e+x^2\right)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{e}} x^3 \log\left(e+x^2\right)\, dx.$$

A questo punto effettuiamo una sostituzione per semplificare la struttura dell'integranda. Poniamo

$$e + x^2 = t,$$

da cui, derivando alla Leibniz,

$$2x\, dx = dt.$$

Trasformiamo anche gli estremi di integrazione. Risulta

$$t_0 = e + x_0^2 = e + 0^2 = e, \qquad t_1 = e + x_1^2 = e + \left(\sqrt{e}\right)^2 = e + e = 2e.$$

Moltiplicando e dividendo per il fattore costante 2 e scrivendo $x^3 = x \cdot x^2$, risulta, osservato che dalla sostituzione si ricava pure $x^2 = t - e$,

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{e}} x^3 \log\left(e+x^2\right)\, dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{e}} 2\cdot x\cdot x^2 \log\left(e+x^2\right)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_e^{2e} (t-e)\cdot\log t\, dt.$$

L'integrale indefinito

$$\int (t-e)\log t\, dt$$

lo calcoliamo applicando la formula di integrazione per parti: deriviamo $\log t$ e integriamo $(t-e)$. Si ha
Si ha

$$\begin{array}{ccc} \textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\ \log t & & t-e \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \nwarrow & \\ \dfrac{1}{t} & \overleftarrow{-\int\cdot} & \dfrac{t^2}{2} - et \end{array}.$$

Risulta quindi

$$\int (t-e)\log t\,dt = \left(\frac{t^2}{2}-et\right)\cdot \log t - \int \frac{1}{t}\cdot\left(\frac{t^2}{2}-et\right)\,dt =$$

$$= \left(\frac{t^2}{2}-et\right)\cdot \log t - \int \left(\frac{t}{2}-e\right)\,dt = \left(\frac{t^2}{2}-et\right)\cdot \log t - \frac{t^2}{4}+et+c$$

L'integrale definito vale

$$\frac{1}{4}\cdot\int_e^{2e}(t-e)\log t\,dt = \frac{1}{4}\cdot\left[\left(\frac{t^2}{2}-et\right)\cdot\log t-\frac{t^2}{4}+et\right]_e^{2e} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left\{\left(\frac{4e^2}{2}-2e^2\right)\log(2e)-\frac{4e^2}{4}+2e^2-\left[\left(\frac{e^2}{2}-e^2\right)\log e-\frac{e^2}{4}+e^2\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(e^2+\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{4}e^2-e^2\right) = \frac{3}{16}e^2 = .$$

21) **[T.E. 29/01/2010]**

Calcolare la primitiva $F(x)$ della funzione $f:]-\infty,0]\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\sqrt{e^{4x}-e^{6x}}$ tale che $F(0)=1$.
Quindi calcolare $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$.

Svolgimento.

Calcoliamo la generica primitiva di f, vale a dire

$$\int\sqrt{e^{4x}-e^{6x}}\,dx.$$

Cominciamo col raccogliere il fattore e^{4x} sotto radice e trasportiamolo fuori dal simbolo di radice:

$$\int\sqrt{e^{4x}-e^{6x}}\,dx = \int\sqrt{e^{4x}\left(1-e^{2x}\right)}\,dx = \int e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx.$$

L'integrale diviene pertanto

$$\int e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx.$$

Tale integrale può essere risolto attraverso una sostituzione.

Poniamo

$$\sqrt{1-e^{2x}} = t.$$

Deriviamo alla Leibniz e troviamo

$$\frac{-e^{2x}\cdot 2}{2\sqrt{1-e^{2x}}},dx = dt,$$

ovvero

$$\frac{-e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = dt.$$

Divideremo e moltiplicheremo, restando dentro al simbolo di integrale, per il fattore $-\sqrt{1-e^{2x}}$. Risulta

$$\int e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx = \int e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}\cdot\frac{-\sqrt{1-e^{2x}}}{-\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx =$$

$$= -\int t\cdot t\,dt = -\int t^2\,dt = -\frac{t^3}{3}+c.$$

Tornando alla variabile indipendente x si trova

$$\int e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3}+c.$$

A questo punto cerchiamo la primitiva F che verifica

$$F(0) = 1.$$

Sostituendo a x il valore 0 e a F il valore 1 troviamo

$$-\frac{1}{3}\sqrt{((1-e^0)}+c = 1,$$

cioè

$$-\frac{1}{3}\sqrt{1-1}+c = 1,$$

da cui

$$c = 1.$$

La primitiva cercata è pertanto

$$F(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3}+1.$$

Per concludere l'esercizio, calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to-\infty} F(x).$$

Poiché $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, si ha

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3} + 1 =$$

$$= \left[-\frac{1}{3}\sqrt{1-0}+1\right] = \left[-\frac{1}{3}+1\right] = \frac{2}{3}.$$

22) **[T.E. 11/01/2010]**
Calcolare l'integrale seguente

$$\int_{e^{-1/2}}^{1} 7\frac{e^{1/(1+\log x)}}{x(1+\log x)^3}\,dx.$$

Svolgimento.

Anzitutto, per linearità, trasportiamo fuori dal simbolo di integrale il fattore 7. Si ha

$$\int_{e^{-1/2}}^{1} 7\frac{e^{1/(1+\log x)}}{x(1+\log x)^3}\,dx = 7\int_{e^{-1/2}}^{1} \frac{e^{1/(1+\log x)}}{x(1+\log x)^3}\,dx,$$

Conviene effettuare una sostituzione. Poniamo

$$\frac{1}{1+\log x} = y,$$

da cui, derivando alla Leibniz, troviamo

$$\frac{-\frac{1}{x}}{(1+\log x)^2}\,dx = dy,$$

cioè

$$-\frac{1}{x(1+\log^2 x)}\,dx = dy.$$

Trasformiamo gli estremi di integrazione.
Risulta

$$y_0 = \frac{1}{1+\log x_0} = \frac{1}{1+\log\left(e^{-1/2}\right)} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2, \qquad y_1 = \frac{1}{1+\log x_1} = \frac{1}{1+\log 1} = 1.$$

L'integrale, riscritto opportunamente e moltiplicando per il fattore -1, viene gestito attraverso il teorema di sostituzione. Si ha

$$7\cdot\int_{e^{-1/2}}^{1} 7\frac{e^{1/(1+\log x)}}{x(1+\log x)^3}\,dx = -7\cdot\int_{e^{-1/2}}^{1} \frac{e^{1/(1+\log x)}}{-x(1+\log x)^2}\cdot\frac{1}{1+\log x}\,dx =$$

$$= -7 \int_2^1 e^y \cdot y \, dy.$$

L'integrale indefinito

$$\int y \cdot e^y \, dy$$

lo risolviamo applicando la formula di integrazione per parti.

Deriviamo y e integriamo e^y.
Si ha

$$\begin{array}{ccc}
\textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\
y & & e^y \\
\downarrow & & \downarrow \\
& \nwarrow & \\
1 & \overset{\longleftarrow}{-\int \cdot} & e^y
\end{array}$$

Quindi

$$\int y e^y \, dy = y e^y \int e^y \, dy = e^y (y-1).$$

Ne segue che

$$-7 \int_2^1 e^y \cdot y \, dy = -7 \cdot \left[e^y (y-1) \right]_2^1 = -7 \left[e(1-1) - e^2(2-1) \right] = 7e^2.$$

23) **[T.E. 06/09/2010]**
Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{5 \displaystyle\int_0^x \left(e^{-t^2} - (\cos t)^2 \right) dt}{x^5}.$$

(Suggerimento: utilizzare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale ed il teorema di de l'Hôpital).

Svolgimento.

Ricordando che

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0,$$

si ha che, se $x \to 0$, il numeratore della frazione tende a

$$5 \int_0^0 \left(e^{-t^2} - (\cos t)^2\right) \, dt = 5 \cdot 0 = 0.$$

Anche il denominatore tende a 0.
Il limita si presenta pertanto nella forma indeterminata

$$\left[\frac{0}{0}\right].$$

Quando si è in presenza di tale forma indeterminata (o si è in presenza della forma $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$) è possibile applicare il teorema di de l'Hôpital, il quale ci autorizza a calcolare, in luogo del limite iniziale, il limite del rapporto delle derivate di numeratore e denominatore della frazione originaria.
Quindi dobbiamo calcolare (portando fuori dalla derivata la costante moltiplicativa 5)

$$\lim_{x \to 0} \frac{5 \cdot \left(\int_0^x \left(e^{-t^2} - (\cos t)^2\right) \, dt\right)'}{(x^5)'},$$

confidando nel fatto che il precedente limite esista. Se non dovesse esistere, il teorema di de l'Hôpital non consentirebbe di trarre alcuna conclusione circa il limite di partenza.
La derivata del denominatore è subito calcolata; si ha infatti

$$(x^5)' = 5x^4.$$

Spendiamo qualche parola in più sulla derivata del numeratore.
Anzitutto osserviamo che il numeratore della frazione iniziale, vale a dire

$$F(x) := \int_0^x \left(e^{-t^2} - (\cos t)^2\right) \, dt,$$

altro non è che una **funzione integrale** per la funzione

$$f(t) = e^{-t^2} - (\cos t)^2.$$

Di tale funzione integrale dobbiamo calcolare la derivata prima. Ricorreremo **teorema fondamentale del calcolo integrale** che consente, per l'appunto, di calcolare la derivata prima di una funzione integrale.
Le ipotesi di tale teorema sono verificate in quanto la funzione integranda

$$f(t) = e^{-t^2} - (\cos t)^2$$

è continua su tutto $\mathbb{R}$, quindi anche in un intorno di 0 (ricordiamoci che $x \to 0$).
Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la derivata prima della funzione F nel punto

x (punto in cui f è continua) è la funzione integranda f valutata in x, vale a dire $f(x)$; in formule

$$F'(x) = f(x).$$

In particolare, nel nostro caso, si ha

$$F'(x) = \left(\int_0^x \left(e^{-t^2} - (\cos t)^2 \right) \, dt \right)' = \left(e^{-x^2} - (\cos x)^2 \right).$$

Quindi, per il teorema di de l'Hôpital, dobbiamo calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{5 \left(e^{-x^2} - (\cos x)^2 \right)}{5x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(e^{-x^2} - (\cos x)^2 \right)}{x^4},$$

che si presenta ancora nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0} \right]$.
Volendo potremmo applicare nuovamente (più volte) il teorema di de l'Hôpital; decidiamo invece di utilizzare gli sviluppi in serie di Taylor in un intorno di 0.
Ricordiamo che valgono le seguenti formule:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + o\left(t^4\right), \qquad \text{per } t \to 0,$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + o\left(t^5\right), \qquad \text{per } t \to 0.$$

Per composizione si ha

$$e^{-x^2} = 1 + \left(-x^2\right) + \frac{1}{2}\left(-x^2\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-x^2\right)^3 + \frac{1}{24}\left(-x^2\right)^4 + o\left(x^8\right) =$$

$$= 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 + o\left(x^8\right)$$

e

$$(\cos x)^2 = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^5\right) \right)^2 = 1 + \frac{x^4}{4} - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4).$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(e^{-x^2} - (\cos x)^2 \right)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 + o\left(x^8\right) - \left(1 + \frac{x^4}{4} - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o\left(x^4\right) \right) \right)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^4 + o\left(x^4\right)}{x^4} = \lim_{x\to O} \frac{\frac{2}{12}x^4 + o\left(x^4\right)}{x^4} = \frac{1}{6}.$$

24) Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx.$$

Svolgimento.

Possiamo risolverlo in due modi, o tramite una sostituzione o tramite l'integrazione per parti.

1° modo: per sostituzione.

Osserviamo che l'integrale

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx$$

non è risolubile con una sostituzione algebrica. La sostituzione $9-x^2=t$ non porterebbe ad alcun risultato. L'integrale è un caso particolare dell'integrale più generale

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

In casi come questi è conveniente operare la sostituzione

$$x = a\sin t,$$

per poter sfruttare la relazione fondamentale della goniometria, vale a dire

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Nel nostro caso,

$$\sqrt{9-x^2},$$

si ha

$$a^2 = 9,$$

quindi $a=3$.
Poniamo quindi (in base a quanto suggerito)

$$x = 3\sin t, \tag{2}$$

da cui

$$dx = 3\cos t\, dt.$$

Riscriviamo l'integrale nella nuova variabile t: si ha

$$\int \sqrt{9 - 9\sin^2 t} \cdot 3\cos t\, dt = 3 \int \sqrt{9(1 - \sin^2 t)} \cos t\, dt =$$

$$= 9 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t\, dt = 9 \int \sqrt{\cos^2 t} \cos t\, dt = 9 \int \cos t \cdot \cos t\, dt =$$

$$= 9 \int \cos^2 t\, dt$$

(abbiamo scelto $+\cos t$ nell'estrarre la radice quadrata; lo scegliere $-\cos t$ non avrebbe comportato alcuna differenza).
Dobbiamo quindi calcolare l'integrale

$$9 \int \cos^2 t\, dt.$$

Per risolvere questo integrale ricorriamo alle formule di bisezione, già richiamate in precedenza. Poiché

$$\cos t = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2t}{2}},$$

ne segue

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}.$$

Quindi

$$9 \int \cos^2 t\, dt = 9 \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = 9 \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt =$$

$$= \frac{9}{2}t + \frac{9}{2} \int \cos 2t\, dt = \frac{9}{2}t + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} \int 2 \cdot \cos 2t\, dt =$$

$$= \frac{9}{2}t + \frac{9}{4}\sin(2t).$$

Torniamo alla variabile x.

Dobbiamo esprimere, in funzione di x, i termini

$$t, \qquad \sin(2t) = 2\sin t\cos t \ \ \text{(per la formula di duplicazione del seno).}$$

Per quanto riguarda t ricaviamo da (2)

$$\sin t = \frac{x}{3},$$

da cui, invertendo la funzione sin,

$$t = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right).$$

Dalla relazione fondamentale della trigonometria si trova

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t,$$

da cui

$$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^3} = \sqrt{1-\frac{x^2}{9}} = \sqrt{\frac{9-x^2}{9}} =$$

$$= \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}.$$

(abbiamo tenuto nell'estrarre la radice lo stesso segno di prima, cioè il +)

Quindi

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}.$$

Pertanto si ha

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{9}{4}\cdot 2\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + c =$$

$$= \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + c.$$

2° modo: per parti.

Vogliamo risolvere per parti l'integrale

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx.$$

Vediamo l'integranda come il prodotto della funzione 1 e della funzione $\sqrt{9-x^2}$. Cioè

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \int 1\cdot\sqrt{9-x^2}\,dx.$$

Deriviamo la funzione $\sqrt{9-x^2}$ e integriamo la funzione 1. Si ha lo schema

$$\begin{array}{ccc}
\textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\
\sqrt{9-x^2} & & 1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
& \nwarrow & \\
\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}} & \overset{\longleftarrow}{-\int\cdot} & x
\end{array}$$

L'integrale diviene

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = x\sqrt{9-x^2} - \int \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\cdot x\,dx = x\sqrt{9-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx.$$

A questo punto aggiungiamo e sottraiamo 9 al numeratore. Otteniamo

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = x\sqrt{9-x^2} - \int \frac{-x^2+9-9}{\sqrt{9-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{9-x^2} - \int \frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx + 9\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{9-x^2} - \int \sqrt{9-x^2}\,dx + 9\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{9-x^2} - \int \sqrt{9-x^2}\,dx + 9\int \frac{1}{\sqrt{9\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{9-x^2} - \int \sqrt{9-x^2}\,dx + 3\cdot 3\int \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{9-x^2} - \int \sqrt{9-x^2}\,dx + 9\arcsin\left(\frac{x}{3}\right).$$

Riscrivendo solamente il primo e l'ultimo membro della precedente catena di uguaglianze abbiamo

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = x\sqrt{9-x^2} - \int \sqrt{9-x^2}\,dx + 9\arcsin\left(\frac{x}{3}\right).$$

Notiamo che sia a primo sia a secondo membro compare (con segni opposti) l'integrale che dovevamo inizialmente calcolare.
Portando l'integrale da calcolare a primo membro otteniamo

$$2\cdot\int \sqrt{9-x^2}\,dx = x\sqrt{9-x^2} + 9\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + c,$$

da cui

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{9-x^2} + 9\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right) + c,$$

che è lo stesso risultato a cui eravamo giunti col metodo di sostituzione.

25) **[T.E. 09/01/2009]**
Calcolare

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{3\sqrt{x+1}}\,dx.$$

Svolgimento.

Calcoliamo l'integrale indefinito applicando la formula di integrazione per parti.
Ci conviene però riscrivere l'integrale come segue

$$\frac{1}{3}\int \frac{\arcsin x}{(x+1)^{1/2}}\,dx = \frac{1}{3}\int \arcsin x\cdot(x+1)^{-1/2}\,dx.$$

Deriviamo la funzione $\arcsin x$ e integriamo la funzione $(x+1)^{-1/2}$.
Calcoliamo quindi

$$\int (x+1)^{-1/2}\,dx.$$

Si tratta di un integrale di semplice esecuzione: ad esempio, posto $(x+1) = y$, si ha immediatamente

$$dx = dy,$$

da cui

$$\int (x+1)^{-1/2}\,dx = \int y^{-1/2}\,dy = \frac{y^{-1/2+1}}{-1/2+1} + c = -2y^{1/2} + c = 2(x+1)^{1/2} + c.$$

Scelto $c = 0$, predisponiamo lo schema della formula di integrazione per parti. Risulta

$$\begin{array}{ccc}
\textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\
\arcsin x & & (x+1)^{-1/2} \\
\downarrow & & \downarrow \\
& \nwarrow & \\
\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \overset{\longleftarrow}{-\int \cdot} & 2\sqrt{x+1}
\end{array}$$

Si ha

$$\frac{1}{3}\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\left(2\sqrt{x+1}\arcsin x - \int \frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\arcsin x - \frac{2}{3}\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

D'altra parte

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)} = \sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x},$$

in quanto l'integrale definito è da calcolare su $[0,1]$ e su tale intervallo entrambi i fattori $(1-x)$ e $(1+x)$ sono positivi, quindi le singole radici quadrate hanno perfettamente senso.
Otteniamo

$$\frac{1}{2}\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\arcsin x - \frac{2}{3}\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\arcsin x - \frac{2}{3}\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\arcsin x - \frac{2}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\arcsin x - \frac{2}{3}\int (1-x)^{-1/2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\arcsin x + \frac{2}{3}\int (-1)\cdot(1-x)^{-1/2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\arcsin x + \frac{2}{3}\cdot\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\arcsin x + \frac{4}{3}\sqrt{1-x} + c.$$

Detta $F(x)$ la primitiva corrispondente a $c = 0$, si ha

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{3\sqrt{x+1}}\,dx = F(1) - F(0) =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2}\arcsin 1 + \frac{4}{3}\sqrt{0} - \frac{2}{3}\sqrt{1}\arcsin 0 - \frac{4}{3}\sqrt{1} = \frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2}\pi - 4\right).$$

26) Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+3}\,dx.$$

Svolgimento.

Si tratta dell'integrale di una funzione razionale fratta non interpretabile come la derivata di un logaritmo.
Posto infatti

$$x^2 + x + 3 = t,$$

si avrebbe

$$(2x+1)\,dx = dt.$$

Non è possibile ottenere a numeratore il fattore $(2x+1)$ con una semplice moltiplicazione.
Trattandosi di una funzione razionale fratta, controlliamo se il denominatore sia decomponibile in fattori: in tale caso, il metodo dei fratti semplici consentirebbe di ricondurre la frazione alla somma di due frazioni più semplici e facilmente integrabili.
Tuttavia il polinomio a denominatore non è decomponibile, in quanto il suo discriminante è minore di 0. Si ha infatti

$$\Delta = 1 - 12 = -11 < 0.$$

Dall'algebra sappiamo che un polinomio di secondo grado con coefficiente di grado massimo positivo e discriminante negativo risulta essere strettamente maggiore di 0 per qualsiasi valore si decida di attribuire alla variabile x. Tale aspetto suggerisce di interpretare il polinomio come la somma di due quadrati; in particolare, converrà scegliere come primo quadrato il termine 1 per ricondursi poi, con una sostituzione, alla derivata della funzione arctan.

Prima di procedere con l'individuazione della somma di due quadrati a denominatore, è necessario però modificare opportunamente il denominatore e riscrivere la frazione come somma di due frazioni di cui la prima sia interpretabile come la derivata di un logaritmo.
Si ha

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+3}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2(x+2)}{x^2+x+3}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x+4}{x^2+x+3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x+1+3}{x^2+x+3}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \left(\frac{2x+1}{x^2+x+3} + \frac{3}{x^2+x+3}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+3) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+3}\,dx,$$

dove abbiamo omesso il modulo nell'argomento del logaritmo a causa del fatto che il polinomio x^2+x+3 è positivo per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$.
Ci resta da calcolare allora

$$\int \frac{1}{x^2+x+3}\,dx.$$

Bisogna interpretare il denominatore come una somma di quadrati, in particolare un quadrato di binomio e il quadrato di un numero reale.
Consideriamo i primi due termini del polinomio x^2+x+3, vale a dire x^2+x e interpretiamoli come il quadrato del primo termine e il doppio prodotto di un certo quadrato di binomio. Essendo chiaramente x il primo termine (il cui quadrato è x^2) e x il doppio prodotto del primo per il secondo termine, si ha che il prodotto tra il primo e secondo termine è $\frac{1}{2}x$, da cui si deduce che il secondo termine è $\frac{1}{2}$.
Se calcoliamo infatti il quadrato di binomio che si è intuito, troviamo

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2+x+\frac{1}{4}.$$

Se ne deduce che

$$x^2+x = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

da cui

$$x^2+x+3 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 3 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} = \left(\frac{2x+1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}.$$

Abbiamo quindi riscritto il denominatore come somma di quadrati.
Torniamo all'integrale. Si ha

$$\int \frac{1}{x^2+x+3}\,dx = \int \frac{1}{\frac{11}{4}+\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2}\,dx = \int \frac{1}{\frac{11}{4}\cdot\left[1+\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2\cdot\frac{4}{11}\right]}\,dx =$$

$$= \frac{4}{11}\cdot\int \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{11}}\right)^2}\,dx = \frac{4}{11}\cdot\int \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right)^2}\,dx.$$

Posto

$$\frac{2x+1}{\sqrt{11}} = y,$$

da cui

$$\frac{2}{\sqrt{11}}\,dx = dy,$$

si trova, moltiplicando e dividendo per $\frac{2}{\sqrt{11}}$,

$$\frac{4}{11}\cdot\int \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right)^2}\,dx = \frac{4}{11}\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}\cdot\int \frac{\frac{2}{\sqrt{11}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{11}}{11}\cdot\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{2\sqrt{11}}{11}\cdot\arctan y + c =$$

$$= \frac{2\sqrt{11}}{11}\cdot\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right) + c.$$

L'integrale di partenza è quindi

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+3}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+x+3) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+3) + \frac{3}{2}\cdot\frac{2\sqrt{11}}{11}\cdot\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right) + c =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+3) + \frac{3\sqrt{11}}{11}\cdot\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right) + c$$