Esercitazione del 30 novembre 2023

1. (Prova d'esame 12 luglio 2022) Sapendo che $\exp(x) = e^x$, studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\exp\left(\frac{(n+5)! + 7^n + \sin n}{(n+7)!}\right) - 1\right].$$

2. (Prova d'esame 29 marzo 2021) Sia $\alpha \in (0, +\infty)$. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n + \arctan(n!)}{e^{2n} - 1}$$

al variare di α.

3. (Prova d'esame 13 gennaio 2020) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^n [\log((2n)! + 7) - \log((2n)!)].$$

4. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + \sqrt{\log(n+2)}}{n^3\sqrt{\log(n+2)}}$.

5. (Prova d'esame 20 gennaio 2021) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, discutere il carattere della serie a termini positivi

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(e^{-\frac{1}{2n^2}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha}{\log(n+1) - \log n}.$$

6. (Prova d'esame 11 gennaio 2012) Discutere il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \left[\frac{n}{2}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right]^n.$$

7. (Prova d'esame 10 gennaio 2013) Stabilire per quali $\beta \in \mathbb{R}$ la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{|\beta-7|} \sin(\sqrt{n^4+1} - n^2)$$

è convergente.

Conclusione dell'ultimo esercizio del 29/11/2023

Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(7-\alpha)^n}{\log(1+7^n)}$.

- $\alpha = 6$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\log(1+7^n)}}_{=a_n}$$

Serie a termini positivi

$1+7^n \geq 8 \quad \forall\, n \geq 1$

$\log(1+7^n) \geq \log 8 > 0 \quad \forall\, n \geq 1$ (perchè il logaritmo naturale è una funzione str. crescente)

$1+7^n \sim 7^n$ per $n \to +\infty$

$\log(1+7^n) \sim \log(7^n) = n \cdot \log 7$ per $n \to +\infty$

$$a_n = \frac{1}{\log(1+7^n)} \sim \frac{1}{\log 7} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{=b_n}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge (è una serie armonica), quindi

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge per il crit. del confronto asintotico.

- $\alpha = 8$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log(1+7^n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{\log(1+7^n)}}_{=b_n}$$

$b_n > 0 \quad \forall\, n \geq 1$, quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log(1+7^n)}$ è a

segni alterni.

Si vuole applicare il criterio di Leibniz

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log(1+7^n)} = 0$$

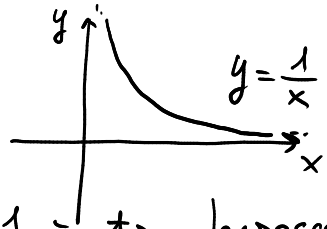
b_n è monotona decrescente

$$1+7^n \leq 1+7^{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

$$\log(1+7^n) \leq \log(1+7^{n+1}) \quad \forall n \geq 1$$

perchè $y = \log x$ è str. crescente

$$\underbrace{\frac{1}{\log(1+7^n)}}_{b_n} \geq \underbrace{\frac{1}{\log(1+7^{n+1})}}_{a_n} \quad \forall n \geq 1$$



$y = \frac{1}{x}$ è str. decrescente in $(0, +\infty)$

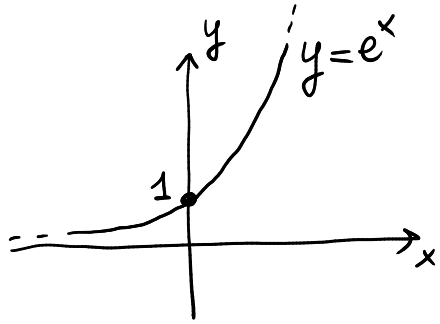
Per il criterio di Leibniz, converge $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log(1+7^n)}$.

In particolare, converge semplicemente.

(12/07/2022)

Studiare la convergenza di

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\exp\left(\frac{(n+5)!+7^n+\sin n}{(n+7)!}\right)-1\right]}_{=a_n}.$$



$e^x > 1 \quad \forall x \in (0,+\infty)$

$a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, quindi la serie è a t.p.

$(n+5)!+7^n+\sin n \sim (n+5)!$ per $n \to +\infty$
per confronto di infiniti e perchè $n \mapsto \sin n$ è una succ. limitata

$$\exp\left(\frac{(n+5)!+7^n+\sin n}{(n+7)!}\right)-1 \sim \exp\left(\frac{(n+5)!}{(n+7)!}\right)-1 =$$

$$= \exp\left(\frac{\cancel{(n+5)!}}{(n+7)(n+6)\cancel{(n+5)!}}\right)-1 = \exp\left(\frac{1}{\underbrace{(n+7)(n+6)}_{\sim n^2}}\right)-1 \sim$$

$$\sim \exp\left(\frac{1}{n^2}\right)-1 \sim \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{=b_n} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$

$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge (è una serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\lambda}} \text{ con } \lambda = 2)$$

Per il criterio del confronto asintotico, converge anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

(29/03/2021)

Discutere la convergenza di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{\alpha^n + \arctan(n!)}{e^{2n}-1}}_{=a_n}$

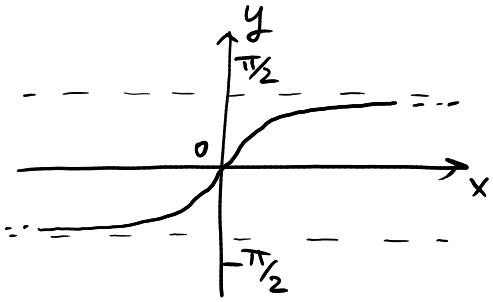
al variare di $\alpha \in (0,+\infty)$.

$a_n > 0 \ \forall n \geq 1$

$e^{2n} - 1 > 0 \ \forall n \geq 1$ (visto prima)

$\alpha > 0 \Rightarrow \alpha^n > 0 \ \forall n \geq 1$

$\arctan(n!) > 0 \ \forall n \geq 1$ perchè $\arctan(x) > 0 \ \forall x \in (0,+\infty)$



Per linearità, si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n + \arctan(n!)}{e^{2n}-1} = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{e^{2n}-1}}_{A} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n!)}{e^{2n}-1}}_{B}.$$

B $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n!)}{e^{2n}-1}$

$e^{2n} - 1 \sim e^{2n}$ per $n \to +\infty$

$\arctan(n!) \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ per $n \to +\infty$

$$\frac{\arctan(n!)}{e^{2n}-1} \sim \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{e^2}\right)^n \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{e^2}\right)^n$ è una serie geometrica con ragione $q = \frac{1}{e^2}$. Dato che $0 < \frac{1}{e^2} < 1$, quindi la serie converge.

Per il criterio del confronto asintotico, converge anche $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n!)}{e^{2n}-1}$.

(B) converge $\forall \alpha \in (0,+\infty)$

(A) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{e^{2n}-1}$

$$\frac{\alpha^n}{e^{2n}-1} \sim \frac{\alpha^n}{e^{2n}} = \left(\frac{\alpha}{e^2}\right)^n$$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\alpha}{e^2}\right)^n$ è serie geometrica con ragione $q = \frac{\alpha}{e^2}$

$\frac{\alpha}{e^2} > 0 \quad \forall \alpha \in (0,+\infty)$

$\frac{\alpha}{e^2} < 1 \iff \alpha < e^2$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\alpha}{e^2}\right)^n$ converge se $0 < \alpha < e^2$, diverge positivamente se $\alpha \geq e^2$.

Per il criterio del confronto asintotico,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{e^{2n}-1}$$ si comporta allo stesso modo.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n + \arctan(n!)}{e^{2n}-1}$$ converge se e solo se

sia Ⓐ sia Ⓑ convergono, quindi

- se $0 < \alpha < e^2$, la serie data converge;
- se $\alpha \geq e^2$, la serie data diverge.

<u>Osservazione</u>

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

Quindi in generale <u>non</u> si può dire che

$$\alpha^n + \arctan(n!) \sim \alpha^n \quad \text{per } n \to +\infty$$

(13/01/2020)

Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^n \left[\log\left((2n)!+7\right) - \log\left((2n)!\right) \right]$$

$n^n > 0 \quad \forall n \geq 1$

$\log\left((2n)!+7\right) - \log\left((2n)!\right) > 0 \quad \forall n \geq 1$ perchè

se $0 < x_1 < x_2$ allora $\log(x_1) < \log(x_2)$

La serie è a termini positivi.

$$\boxed{\log A - \log B = \log \frac{A}{B} \quad \text{per ogni } A, B > 0}$$

$$n^n \left[\log\left((2n)!+7\right) - \log\left((2n)!\right) \right] = n^n \cdot \log\left(\frac{(2n)!+7}{(2n)!} \right) =$$

$$= n^n \cdot \log\left(1 + \frac{7}{(2n)!}\right) \sim n^n \cdot \frac{7}{(2n)!} = 7 \cdot \underbrace{\frac{n^n}{(2n)!}}_{= b_n}$$

$\log(1+t) \sim t$ per $t \to 0$

Determiniamo il comportamento di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{n^n} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1)\cdot\cancel{(2n)!}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{\cancel{(n+1)}}{2\cancel{(n+1)}(2n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\downarrow\, e} \cdot \underbrace{\frac{1}{2(2n+1)}}_{\downarrow\, 0} = 0 < 1$$

Per il criterio del rapporto,

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ converge, e quindi,

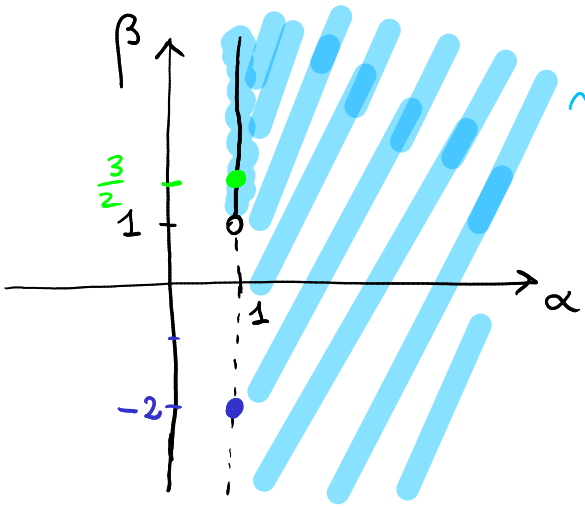
per il criterio del confronto asintotico, la serie di partenza converge.

Slide 31 in serie.pdf

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ fissati}$$

La serie converge se $\alpha = 1$ e $\beta > 1$, oppure
se $\alpha > 1$ $\forall \beta \in \mathbb{R}$

In tutti gli altri casi la serie diverge.



~ per queste coppie (α, β) la serie converge

$\alpha = 1, \beta = -2 \Rightarrow$ la serie non converge

$\alpha = 1, \beta = \frac{3}{2} \Rightarrow$ la serie converge

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+\sqrt{\log(n+2)}}{n^3\cdot\sqrt{\log(n+2)}} = a_n$$

se $n \geq 1$, allora $n+2 \geq 3$ e $\log(n+2) \geq \log 3 > 0$

La serie è a termini positivi

$$n^2 + (\log(n+2))^{1/2} \sim n^2 \quad \text{per } n \to +\infty$$ (per confronto di infiniti)

$$a_n \sim \frac{n^2}{n^3(\log(n+2))^{1/2}} = \frac{1}{n(\log(n+2))^{1/2}} \sim \frac{1}{n(\log n)^{1/2}} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\log(n+2) \sim \log n$ per $n \to +\infty$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1/2}}$$ è della forma $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}$$ con

$\alpha = 1$ e $\beta = \frac{1}{2}$, quindi diverge.

Per il criterio del confronto asintotico, diverge la serie $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+(\log(n+2))^{1/2}}{n^3\cdot(\log(n+2))^{1/2}}$$

(20/01/2021)

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, discutere il carattere della serie a termini positivi

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\frac{\left(e^{-\frac{1}{2n^2}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha}}{\log(n+1) - \log n}}_{= a_n}$$

$\log(1+t) \sim t$ per $t \to 0$

$$\log(n+1) - \log(n) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

per $n \to +\infty$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{per } t \to 0$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^5) \quad \text{per } t \to 0$$

$$e^{-\frac{1}{2n^2}} = 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^4}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{8n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$\cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{24n^4} + o\left(\frac{1}{n^5}\right) \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$e^{-\frac{1}{2n^2}} - \cos\frac{1}{n} = \frac{1}{8n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) - \frac{1}{24n^4} + \overbrace{o\left(\frac{1}{n^5}\right)}^{= o\left(\frac{1}{n^4}\right)} =$$

$$= \frac{1}{12n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \sim \frac{1}{12n^4} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$\underbrace{\frac{\left(e^{-\frac{1}{2n^2}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha}}{\log(n+1) - \log n}}_{a_n} \sim \frac{\left(\frac{1}{12n^4}\right)^{\alpha}}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{1}{12^{\alpha}\,\frac{n^{4\alpha}}{n}} = \frac{1}{12^{\alpha}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n^{4\alpha-1}}}_{b_n}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{4\alpha-1}}$ è una serie armonica generalizzata,

dunque converge se e solo se $4\alpha - 1 > 1$

$$4\alpha > 2$$

$$\alpha > \frac{1}{2}$$

Per il criterio del confronto asintotico,

se $\alpha > \frac{1}{2}$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge;

se $\alpha \leq \frac{1}{2}$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge positivamente.

(11/01/2012)

Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\left[\frac{n}{2}\left(e^{1/n}-1\right)\right]^{n}}_{=a_n}$$

La serie a termini positivi

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\left[\frac{n}{2}\left(e^{1/n}-1\right)\right]^{n}\right\}^{1/n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\cdot\frac{n}{2}\left(e^{1/n}-1\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+1)-1}{(n+1)}\right)^{n}\cdot\frac{\cancel{n}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{n}} =$$

$$\boxed{e^{1/n}-1 \sim \frac{1}{n} \quad \text{per } n\to+\infty}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n}}_{\to e^{-1}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2e} < 1$$

Per il criterio della radice, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

(10/01/2013)

Discutere al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ il comportamento di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{n^{|\beta-7|} \sin\left(\sqrt{n^4+1} - n^2\right)}_{= a_n}$$

$n^{|\beta-7|} > 0 \quad \forall n \geq 1$

$n^4+1 > n^4 \quad \forall n \geq 1 \implies \sqrt{n^4+1} > n^2 \quad \forall n \geq 1$

$n^4+1 < (n^2+1)^2 \quad \forall n \geq 1 \implies \sqrt{n^4+1} < n^2+1$

$\implies \sqrt{n^4+1} - n^2 < 1$

$\sin\left(\sqrt{n^4+1} - n^2\right) > 0 \quad \forall n \geq 1$ perchè l'argomento del seno è compreso fra 0 e 1

La serie è a termini positivi

$$\sqrt{n^4+1} - n^2 = \sqrt{n^4\left(1+\frac{1}{n^4}\right)} - n^2 = n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}} - n^2 =$$

$$= n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}} - 1\right) = n^2\left(1 + \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) - 1\right)$$

$= (\triangle)$

$$\boxed{(1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t) \text{ per } t \to 0}$$

$$(\triangle) = n^2\left(\frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2} \text{ per } n \to +\infty$$

$$\sin\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right) \sim \sin\left(\frac{1}{2n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\sin t \sim t$ per $t \to 0$

$$a_n \sim n^{|\beta-7|} \cdot \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2-|\beta-7|}} = b_n$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è una serie armonica generalizzata, dunque converge se e solo se $2-|\beta-7|>1$

$$|\beta-7|<2-1$$
$$|\beta-7|<1$$
$$-1<\beta-7<1$$
$$7-1<\beta<7+1$$
$$6<\beta<8$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se $\beta \in (6,8)$ e diverge positivamente se $\beta \in (-\infty,6] \cup [8,+\infty)$.