Esercitazione del 16 novembre 2023

In ciascuno dei seguenti esercizi è data una funzione $f\colon \operatorname{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.
2. Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f.
3. Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.
4. Studiare la crescenza e decrescenza di f sul suo dominio, calcolando, qualora esistano, punti stazionari, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f.
5. Calcolare la funzione derivata seconda di f. Studiare la concavità e convessità di f sul suo dominio, calcolando, qualora esistano, punti di flesso.
6. Tracciare un grafico qualitativo della funzione f, in accordo con i risultati ottenuti.

① $f(x) = x^4 - x|x|$

② $f(x) = \log\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right) - 2x$

③ $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{2}\log(x^2+1)$

$$f(x) = x^4 - x|x|$$

$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ perché $y = |x|$ e le funzioni polinomiali sono definite in $\mathbb{R}$

f è continua in $\mathbb{R}$ perché $y = |x|$ e le funzioni polinomiali sono continue in $\mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ x^4 + x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

f non è né pari né dispari

$f(1) = 1^4 - 1^2 = 0 \qquad f(-1) = (-1)^4 + (-1)^2 = 2$

$f(1) \neq f(-1) \quad e \quad f(-1) \neq -f(1)$

Non ci sono asintoti verticali (la funzione è continua in $\mathbb{R}$)

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^4 \left(1 - \frac{|x|}{x^3}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} x^4 = +\infty$$

Non ci sono asintoti orizzontali

In particolare, stiamo osservando che $f(x) \sim x^4$ per $x \to \pm\infty$.

Quindi $\frac{f(x)}{x} \sim x^3$ per $x \to \pm\infty$. Ne concludiamo che non ci sono asintoti obliqui.

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ x^4 + x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - 2x & \text{se } x > 0 \\ 4x^3 + 2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (4x^3 - 2x) = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (4x^3 + 2x) = 0$$

$f'_+(0) = f'_-(0) = 0$, quindi f è derivabile anche in $x = 0$ e $f'(0) = 0$.

$\text{dom}(f') = \text{dom}(f)$, cioè non ci sono punti di non derivabilità.

Punti stazionari di f

Cerchiamo $x \in \text{dom}(f)$ tali che $f'(x) = 0$

$x \geq 0$ $\quad f'(x) = 0$

$4x^3 - 2x = 0$

$2x^3 - x = 0$

$x(2x^2 - 1) = 0$

$x = 0 \vee x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

In $[0, +\infty)$ i punti stazionari di f sono $x_0 = 0$ e $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$x < 0$ $\quad f'(x) = 0$

$4x^3 + 2x = 0$

$x(2x^2 + 1) = 0$

$x = 0$

In $(-\infty, 0)$ non ci sono punti stazionari.

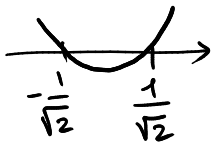
Segno della derivata

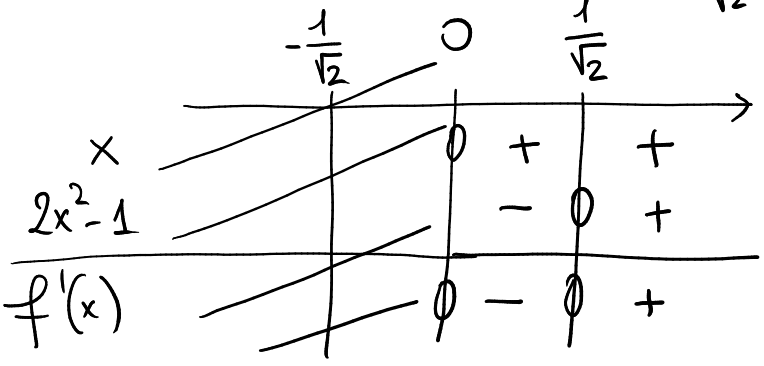
$x \geq 0$ $\quad f'(x) \geq 0$

$x(2x^2 - 1) \geq 0$

$x \geq 0$

$2x^2 - 1 \geq 0 \iff x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$



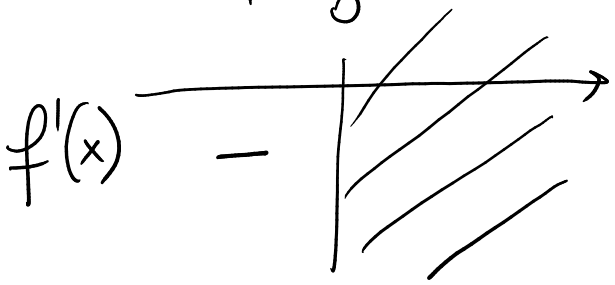


$x<0$

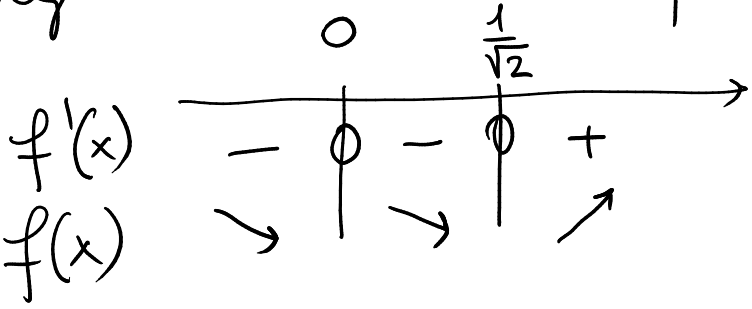
$f'(x) \geq 0$

$x(2x^2+1) \geq 0$

$x \geq 0$ perchè $2x^2+1>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



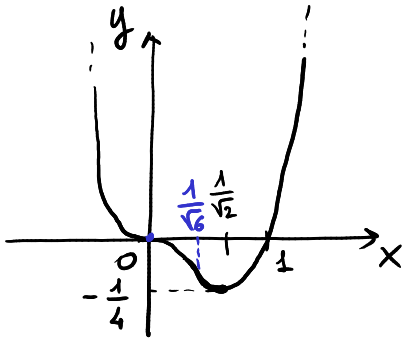
Segno della derivata prima



f è strettamente decrescente in $\left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

f è strettamente crescente in $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ è punto di minimo relativo stazionario



$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(2^{-1/2}\right) = \left(2^{-1/2}\right)^4 - \left(2^{-1/2}\right)^2 = 2^{-2} - 2^{-1} = -\frac{1}{4}$$

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ è punto di minimo assoluto

Non ci sono punti di massimo assoluto, perchè la funzione è illimitata superiormente.

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - 2x & \text{se } x \geq 0 \\ 4x^3 + 2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

← anche per $x=0$: è quello che abbiamo verificato calcolando $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$.

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2 - 2 & \text{se } x > 0 \\ 12x^2 + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^+} f''(x) = -2$ e $\lim_{x \to 0^-} f''(x) = 2$

$\text{dom}(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

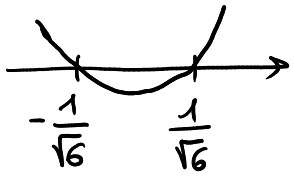
Studio del segno di f''

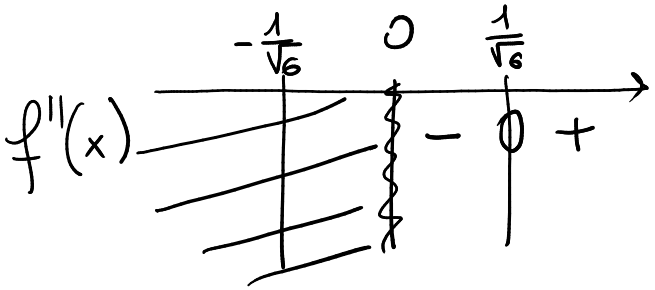
$x \geq 0$ $\quad f''(x) \geq 0$

$12x^2 - 2 \geq 0$

$6x^2 - 1 \geq 0$

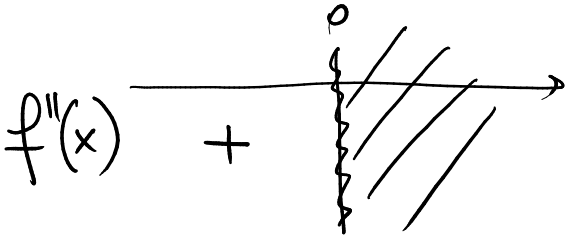
$x \leq -\frac{1}{\sqrt{6}} \vee x \geq \frac{1}{\sqrt{6}}$

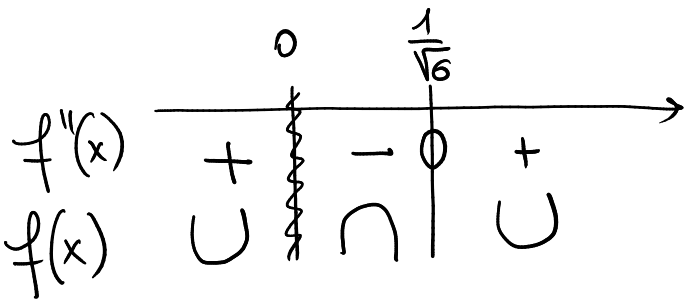




$x < 0$ $\quad f''(x) \geq 0$

$12x^2 + 2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$





$x_0 = 0$ è punto di flesso a tangente orizzontale

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}$ è punto di flesso a tangente obliqua

f è convessa in $(-\infty, 0)$ e in $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, +\infty\right)$,

ed è concava in $\left(0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

$$f(x) = \log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - 2x$$

f è definita se e solo se

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{x+2} > 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \iff x < -2 \vee x > 2$$

$$\text{dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

$$f(-x) = \log\left(\frac{-x-2}{-x+2}\right) - 2(-x) =$$

$$= \log\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + 2x =$$

$$= \log\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{-1} + 2x =$$

$$= -\log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + 2x =$$

$$= -\left[\log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - 2x\right] = -f(x) \quad \forall x \in \text{dom}(f)$$

f è dispari

$\mathrm{dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \left(\underbrace{\log\left(\frac{\overset{\to -4}{x-2}}{\underset{\to 0^-}{x+2}}\right)}_{\to +\infty} - \underbrace{2x}_{\to -4} \right) = +\infty$$

$x = -2$ è asintoto verticale sinistro

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(\underbrace{\log\left(\frac{\overset{\to 0^+}{x-2}}{\underset{\to 4}{x+2}}\right)}_{\to -\infty} - \underbrace{2x}_{\to 4} \right) = -\infty$$

(Il calcolo di questo limite è superfluo se si tiene conto della simmetria
$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathrm{dom}(f)$)

$x = 2$ è asintoto verticale destro

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\underbrace{\log\left(\overset{\to 0}{\frac{x-2}{\underset{\to 1}{x+2}}}\right)}_{} - \underbrace{2x}_{\to +\infty} \right) = -\infty$$

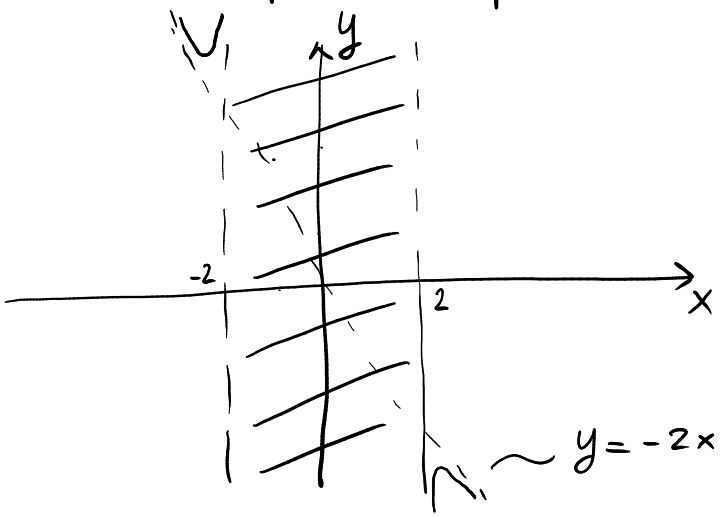
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ perchè f è dispari

Non ci sono asintoti orizzontali.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \underbrace{\log\left(\frac{x-2}{x+2}\right)}_{\to 0} - \frac{1}{\cancel{x}} \cdot 2\cancel{x} \right) = -2$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\underbrace{\log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - 2x}_{f(x)} + 2x\right) = 0$$

$y = -2x$ è asintoto obliquo completo



$$f(x) = \log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - 2x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x-2}{x+2}} \cdot \frac{1\cdot(x+2) - (x-2)\cdot 1}{(x+2)^2} - 2$$

$$= \frac{x+2}{x-2} \cdot \frac{4}{(x+2)^2} - 2 =$$

$$= \frac{4 - 2x^2 + 8}{(x-2)(x+2)} = \frac{12 - 2x^2}{(x-2)(x+2)}$$

$\text{dom}(f') = \text{dom}(f)$ Non ci sono punti di non derivabilità

Punti stazionari $f'(x)$

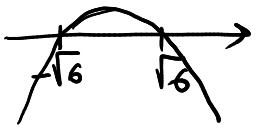
$$\frac{12-2x^2}{(x-2)(x+2)} = 0 \Rightarrow 6 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

$\sqrt{6}$ e $-\sqrt{6}$ sono punti stazionari

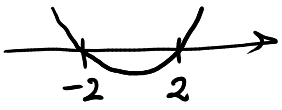
$f'(x) \geq 0$

$$\frac{12-2x^2}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

$12-2x^2 \geq 0 \iff -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}$



$(x-2)(x+2) > 0 \iff x < -2 \vee x > 2$



	$-\sqrt{6}$		-2		2		$\sqrt{6}$	
$12-2x^2$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	
$(x-2)(x+2)$	$+$		$+$	$\nexists$	$+$		$+$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$		$\searrow$	

f è strett. decrescente in ciascuno degli intervalli $(-\infty, -\sqrt{6})$ e $(\sqrt{6}, +\infty)$.

f è strett. crescente in ciascuno degli intervalli $(-\sqrt{6}, -2)$ e $(2, \sqrt{6})$.

$x = \sqrt{6}$ è punto di massimo relativo stazionario

$x = -\sqrt{6}$ è punto di minimo relativo stazionario

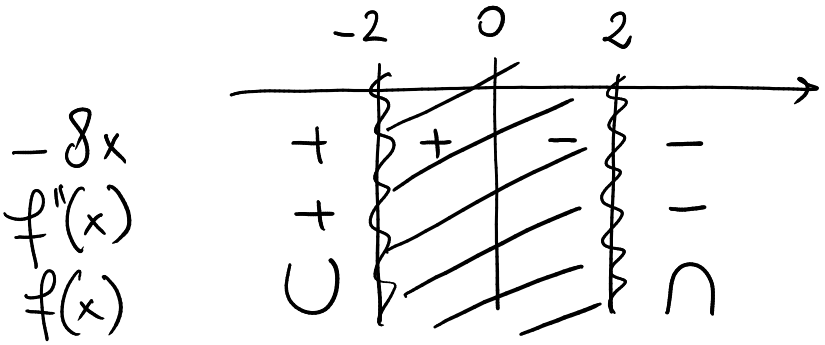
$$f'(x) = \frac{12-2x^2}{x^2-4} = 2 \cdot \frac{6-x^2}{x^2-4}$$

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{-2x(x^2-4) - (6-x^2)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} =$$

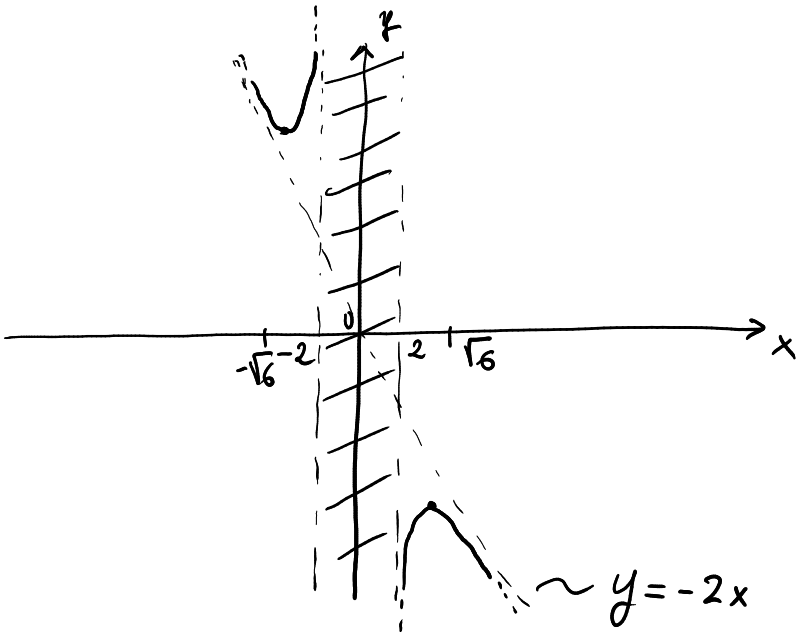
$$= 2 \cdot \frac{-2x(x^2-4+6-x^2)}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$$

$\text{dom}(f'') = \text{dom}(f)$

Il denominatore $(x^2-4)^2$ è positivo $\forall x \in \text{dom}(f)$

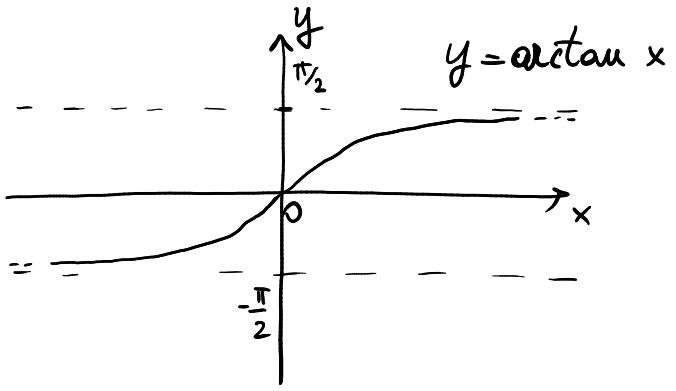


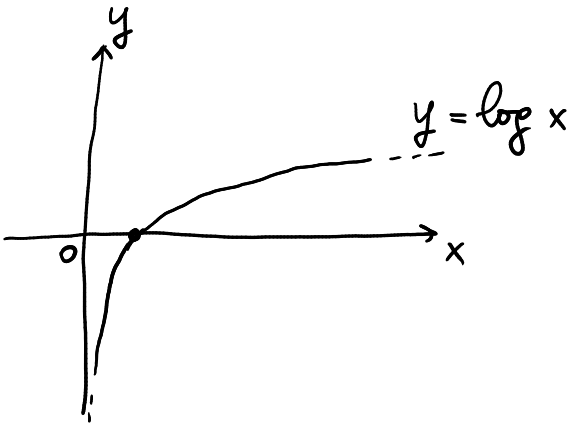
f è convessa in $(-\infty, -2)$ e concava in $(2, +\infty)$.
Non ci sono punti di flesso.



Non ci sono punti di minimo assoluto nè di massimo assoluto, perchè f è illimitata sia superiormente sia inferiormente.

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$





$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 1+x^2 > 0 \end{cases} \iff x \neq 0$$

perchè $1+x^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

f non è nè pari nè dispari

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right) = \frac{\pi}{2}$$

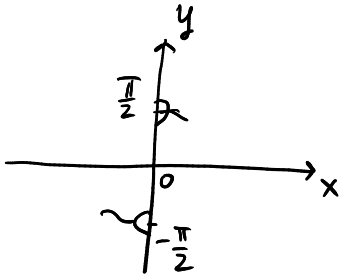
($\frac{1}{x} \to +\infty$, $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$; $1+x^2 \to 1$, $\log 1 = 0$)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right) = -\frac{\pi}{2}$$

($\frac{1}{x} \to -\infty$, $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$; $1+x^2 \to 1$, $\log 1 = 0$)

$x = 0$ non è asintoto verticale

Non ci sono asintoti verticali



$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right) = -\infty$$

($\frac{1}{x} \to 0$, $\arctan 0 = 0$; $1+x^2 \to +\infty$, $\log(+\infty) = +\infty$)

Non ci sono asintoti orizzontali

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\cdot\underbrace{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}_{0}-\frac{1}{2}\underbrace{\frac{\log(1+x^2)}{x}}_{0}\right)=0$$

perchè

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\log(1+x^2)}{x}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x}{1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\overset{2x}{\overbrace{2x}}}{\underset{x^2}{\underbrace{1+x^2}}}=0$$

Non ci sono asintoti obliqui

$$f(x)=\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\log(1+x^2)=\arctan(x^{-1})-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot(-1x^{-2})-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}$$

$-1x^{-2}$: derivata di $\frac{1}{x}$

$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$: derivata dell'arctan calcolata in $\frac{1}{x}$

$$f'(x)=\frac{x^2}{x^2+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{x}{x^2+1}=\frac{-1-x}{x^2+1}$$

$\mathrm{dom}(f')=\mathrm{dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ Non ci sono punti di non derivabilità

Punti stazionari $f'(x)=0$

$$\frac{-1-x}{x^2+1}=0$$

$$-1-x=0$$

$$x=-1$$

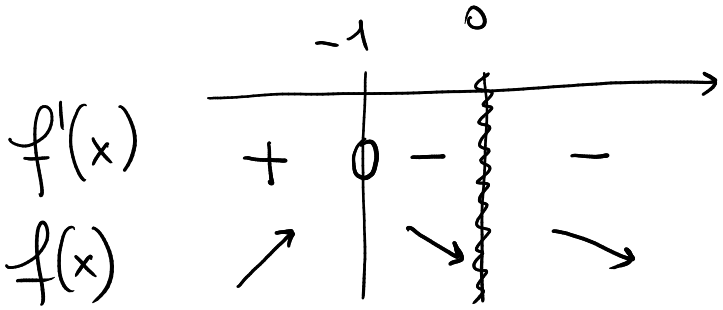
-1 è punto stazionario

Studio del segno di f'

Il denominatore x^2+1 è positivo $\forall x \in \text{dom}(f)$

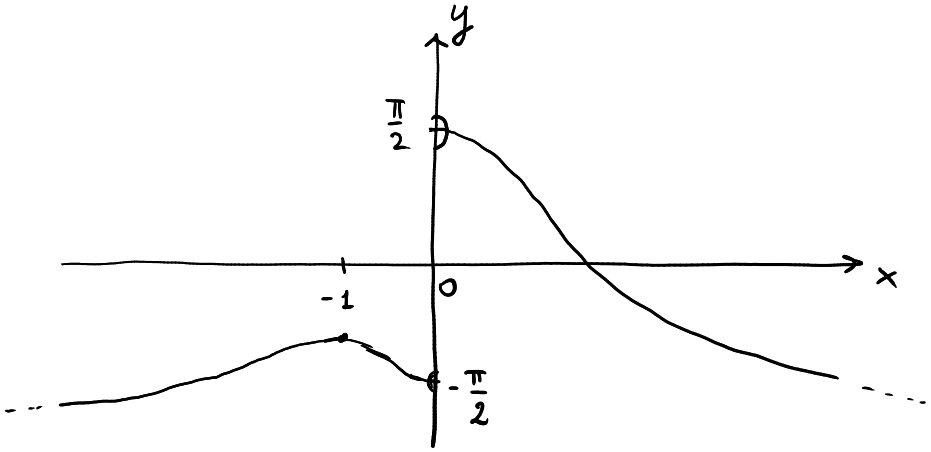
Il segno di f' coincide con il segno di $-1-x$ in $\text{dom}(f)$

$$-1-x \geq 0 \iff x \leq -1$$



f è strettamente crescente in $(-\infty,-1)$, e strett. decrescente in ciascuno degli intervalli $(-1,0)$ e $(0,+\infty)$

$x=-1$ è punto di massimo relativo stazionario



Da completare: studio della derivata seconda

Non ci sono punti di min assoluto perchè f è illimitata inferiormente.

Non ci sono punti di max assoluto perchè $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$, ma $\frac{\pi}{2}$ non è un valore assunto da f