Esercitazione del 13 novembre 2023

1. In ciascuno dei seguenti esercizi è data una funzione $f\colon \operatorname{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

   (a) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{\log|x|+1}{x}\right)$

   (b) $f(x) = \dfrac{|\tan x|}{\tan^2 x + 1}$

2. Calcolare i seguenti limiti applicando il teorema di De L'Hôpital.

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{\log(1-\cos(2x^2-8x+8))}{\log(x-2)}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\pi - 2\arctan\frac{1}{x^3}}{x^\alpha}$, con $\alpha > 0$ fissato

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{\arccos x - \pi}{\sqrt{x+1}}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x}\right)$

3. In ciascuno dei seguenti esercizi è data una funzione $f\colon \operatorname{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   (1) Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.

   (2) Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f.

   (3) Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

   (4) Studiare la crescenza e decrescenza di f sul suo dominio, calcolando, qualora esistano, punti stazionari, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f.

   (5) Tracciare un grafico qualitativo della funzione f, in accordo con i risultati ottenuti.

   (a) $f(x) = (2x+1)e^{-3x}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se } x > 0 \\ -\sin(\pi x) & \text{se } x \leqslant 0 \end{cases}$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{\log|x|+1}{x}\right)$$

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(x) = g(h(x))$$

$$g(y) = \arctan y \qquad g'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

$$h(x) = \frac{\log|x|+1}{x} \qquad h'(x) = \frac{\frac{1}{\cancel{|x|}} \cdot \frac{\cancel{|x|}}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} - (\log|x|+1)\cdot 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{\log|x|+1}{x}\right)^2} \cdot \frac{1-\log|x|-1}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{(\log|x|+1)^2}{x^2}} \cdot \frac{-\log|x|}{x^2} =$$

$$= \frac{\cancel{x^2}}{x^2+(\log|x|+1)^2} \cdot \frac{-\log|x|}{\cancel{x^2}} = -\frac{\log|x|}{x^2+(\log|x|+1)^2}$$

$\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Non ci sono punti di non derivabilità

$$f(x) = \frac{|\tan x|}{\tan^2 x + 1} \qquad \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \tan^2 x + 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$g(x) = |\tan x| \qquad g'(x) = \frac{|\tan x|}{\tan x} \cdot (1 + \tan^2 x)$$

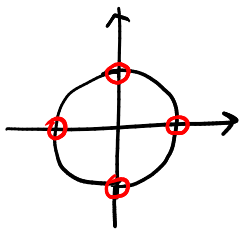
$$h(x) = 1 + \tan^2 x \qquad h'(x) = 2\tan x \cdot (1 + \tan^2 x)$$

$$f'(x) = \frac{\frac{|\tan x|}{\tan x} \cdot (1+\tan^2 x)^2 - |\tan x| \cdot 2\tan x \cdot (1+\tan^2 x)}{(1+\tan^2 x)^2} =$$

$$= \frac{|\tan x| \cdot (1+\tan^2 x)^2 - |\tan x| \cdot 2\tan^2 x\,(1+\tan^2 x)}{(\tan x)(1+\tan^2 x)^2} =$$

$$= \frac{|\tan x| \cdot \cancel{(1+\tan^2 x)} \cdot (1 + \tan^2 x - 2\tan^2 x)}{(\tan x) \cdot (1+\tan^2 x)^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{|\tan x| \cdot (1 - \tan^2 x)}{(\tan x) \cdot (1 + \tan^2 x)}$$



$$\tan x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

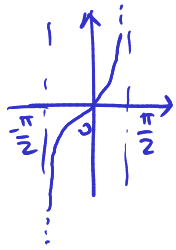
$$\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f) \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathrm{dom}(f') = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - \overbrace{f(0)}^{=0}}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{|\tan x|}{x(1+\tan^2 x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\tan x}^{1}}{x\underbrace{(1+\tan^2 x)}_{1}} = 1$$

se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, allora $\tan x > 0$



$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{|\tan x|}{x(1+\tan^2 x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{-\tan x}^{1}}{x\underbrace{(1+\tan^2 x)}_{1}} = -1$$

se $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, allora $\tan x < 0$

$f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$

0 è un punto angoloso per f

Tutti i punti della forma $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, sono punti angolosi per la funzione f

Calcolare $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{\log\left(1-\cos(2x^2-8x+8)\right)}{\log(x-2)}$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\log\left(\overbrace{1-\cos\left(\overbrace{2(x-2)^2}^{\to 0^+}\right)}^{\to 0}\right)}{\underbrace{\log(x-2)}_{\to -\infty}} \overset{\uparrow}{=}$$

$y = x-2$

Se $x \to 2^+$, allora $y \to 0^+$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{\log\left(1-\cos(2y^2)\right)}{\log y} \overset{(H)}{=}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{1}{1-\cos(2y^2)} \cdot \sin(2y^2)\cdot 4y}{\frac{1}{y}} =$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{\overbrace{\sin(2y^2)}^{\to 0}\cdot 4y\cdot y}{\underbrace{1-\cos(2y^2)}_{\to 0}} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin t \sim t \text{ per } t\to 0 \\ (1-\cos t) \sim \frac{1}{2}t^2 \text{ per } t\to 0 \end{array}}$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{2y^2\cdot 4y^2}{\frac{1}{2}\cdot(2y^2)^2} = \lim_{y\to 0^+} \frac{2\cdot \cancel{4y^4}}{\frac{1}{2}\cdot \cancel{4y^4}} = 4$$

Calcolare $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\pi - 2\arctan\frac{1}{x^3}}{x^\alpha}$ al variare di $\alpha>0$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\pi - 2\underbrace{\arctan\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to +\infty}}_{\to \frac{\pi}{2}}}{\underbrace{x^\alpha}_{\to 0}} =$$

$f(x) = \arctan\frac{1}{x^3}$

$f(x) = g(h(x))$

$g(y) = \arctan y, \quad g'(y) = \frac{1}{1+y^2}$

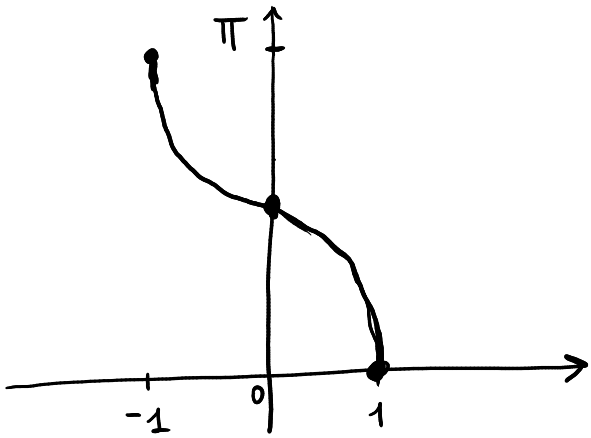
$h(x) = x^{-3}, \quad h'(x) = -3x^{-4}$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^3}\right)^2}\cdot\left(-3x^{-4}\right)}{\alpha\, x^{\alpha-1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{6\cdot\frac{x^6}{x^6+1}\cdot x^{-4}}{\alpha\, x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{6}{\alpha(1+x^6)}}_{\to \frac{6}{\alpha}}\cdot\frac{x^2}{x^{\alpha-1}} =$$

$$= \frac{6}{\alpha}\cdot\lim_{x\to 0^+} x^{3-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0<\alpha<3 \\ \frac{6}{3} = 2 & \text{se } \alpha = 3 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 3 \end{cases}$$

Calcolare $\lim_{x \to -1^+} \dfrac{\arccos(x) - \pi}{\sqrt{x+1}}$ $\begin{matrix} \to 0 \\ \to 0 \end{matrix}$



$$\lim_{x \to -1^+} \frac{\arccos(x) - \pi}{\sqrt{x+1}} =$$

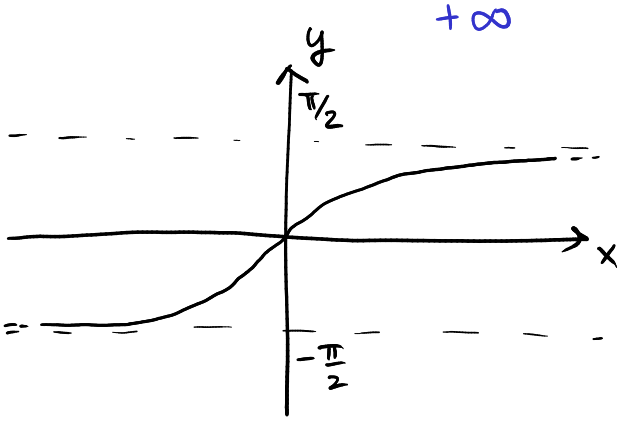
$$\overset{(H)}{=} \lim_{x \to -1^+} \frac{-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}} =$$

$$= \lim_{x \to -1^+} \left(-\frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \lim_{x \to -1^+} \left(-\frac{2\cancel{\sqrt{x+1}}}{\cancel{\sqrt{x+1}} \cdot \sqrt{1-x}} \right) =$$

$$= \lim_{x \to -1^+} \frac{-2}{\sqrt{1-x}} = -\sqrt{2}$$

$\sqrt{1-x} \to \sqrt{2}$

Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \underset{\downarrow\, +\infty}{x} \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)}_{\to 0}$



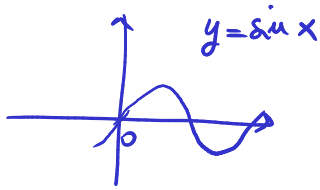
$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\frac{\pi}{2} - \arctan x}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} =$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\underbrace{1+x^2}_{\sim x^2 \text{ per } x\to+\infty}} = 1$$

Calcolare $\lim_{x\to 0^+} \left(\underbrace{\frac{1}{\underbrace{1-\cos x}_{\to 0^+}}}_{\to +\infty} - \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to +\infty} \right)$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x} \right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overset{\to 0}{x} - 2 + \overset{\to 2}{2\cos x}}{\underset{\to 0}{x}\underbrace{(1-\cos x)}_{\to 0}} =$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\overset{\to 1}{1-2\sin x}}{1\cdot\underbrace{(1-\cos x)}_{\to 0^+} + \underbrace{x\cdot\sin x}_{\to 0^+}} = +\infty$$



$$f(x) = (2x+1)\,e^{-3x}$$

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$f(x) = 0 \iff 2x+1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$$

f non è nè pari nè dispari (se lo fosse, anche $\frac{1}{2}$ dovrebbe essere 0 della funzione)

La funzione è continua in $\mathbb{R}$ perchè composizione e prodotto di funz. elementari continue in $\mathbb{R}$.

Non ci sono asintoti verticali per f.

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{(2x+1)}_{\to -\infty} e^{\overbrace{-3x}^{\to +\infty}} = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$$

Non c'è asintoto orizzontale sinistro.

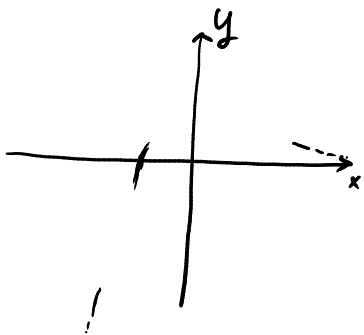
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{2x+1}{x}}_{\to 2} \cdot \underbrace{e^{-3x}}_{\to +\infty} = +\infty$$

Non c'è asintoto obliquo sinistro.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{(2x+1)}_{\to +\infty}\underbrace{e^{-3x}}_{\to 0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{2x+1}^{\to +\infty}}{\underbrace{e^{3x}}_{\to +\infty}} =$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^{3x}\cdot 3} = 0$$

$y=0$ è asintoto orizzontale destro



$$f(x) = (2x+1)e^{-3x}$$

$$f'(x) = 2 \cdot e^{-3x} + (2x+1) \cdot e^{-3x} \cdot (-3) =$$

$$= e^{-3x}(2-6x-3) =$$

$$= -e^{-3x}(6x+1)$$

$\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$ Non ci sono punti di non derivabilità.

Punti stazionari

$$f'(x) = 0$$

$$-e^{-3x}(6x+1) = 0$$

$$6x+1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{6}$$

L'unico punto stazionario è $x = -\frac{1}{6}$

Segno della derivata prima

$$f'(x) = -e^{-3x}(6x+1)$$

Osserviamo che $-e^{-3x} < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

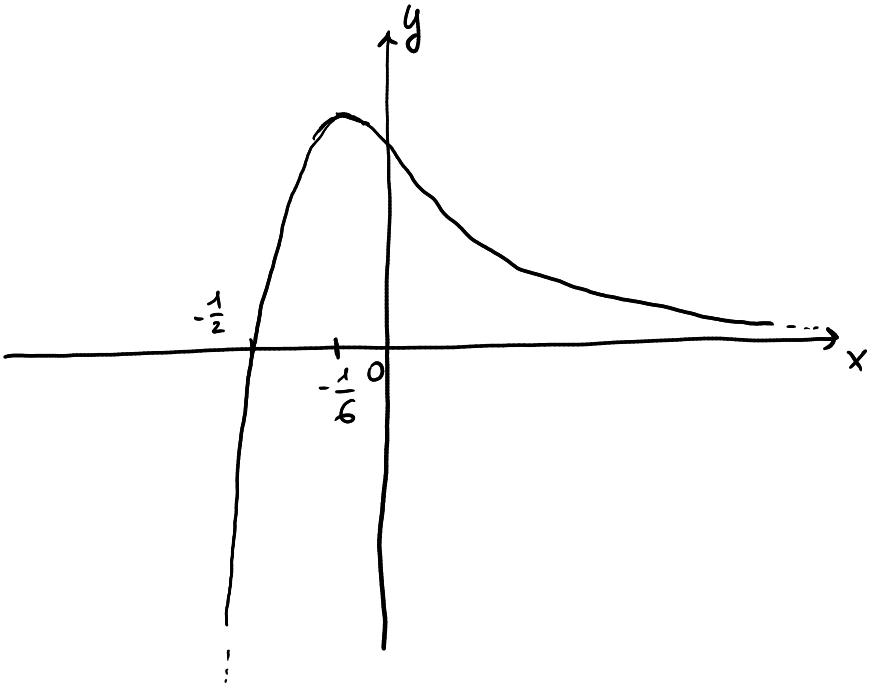
$$6x+1 > 0 \iff x > -\frac{1}{6}$$

		$-\frac{1}{6}$	
$-e^{-3x}$	$-$		$-$
$6x+1$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

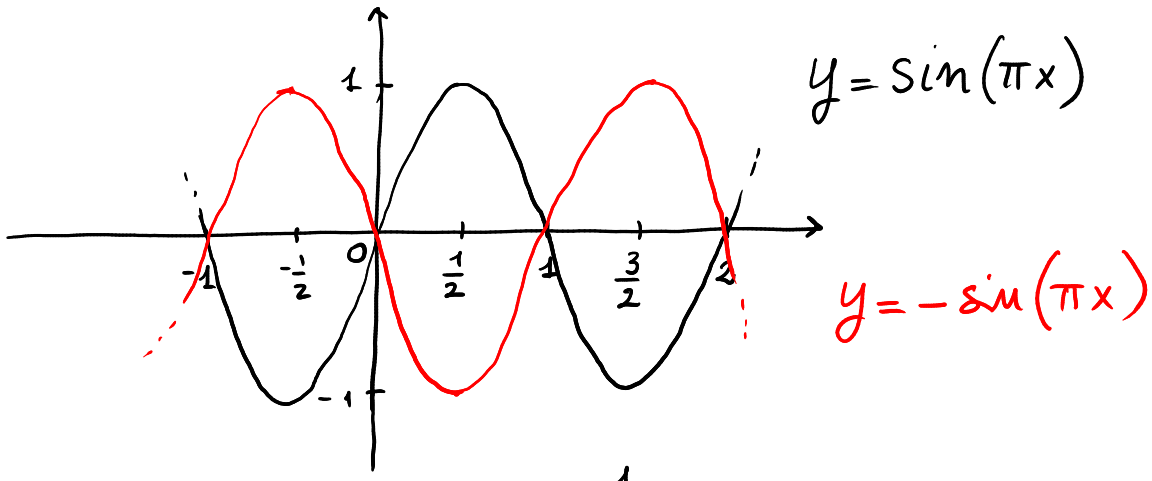
f è strett. crescente in $\left(-\infty, -\frac{1}{6}\right)$ e
strett. decrescente in $\left(-\frac{1}{6}, +\infty\right)$

$x = -\frac{1}{6}$ è punto di massimo relativo e assoluto

Non ci sono punti di minimo assoluto perchè la funzione è illimitata inferiormente.



$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ -\sin(\pi x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$ perchè $e^{-\frac{1}{x}}$ è definito per $x \neq 0$

e $-\sin(\pi x)$ è definito per ogni $x \in \mathbb{R}$

f non è nè pari nè dispari, e non è periodica.

f è continua in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$, perchè è composizione di funzioni elementari continue

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(-\sin(\pi x)\right) = 0 \qquad f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \qquad -\frac{1}{x} \to -\infty$$

f è continua in 0

Dunque f è continua in $\mathbb{R}$

Non ci sono asintoti verticali per f

Non ci sono né asintoto orizzontale né asintoto obliquo sinistro (per la periodicità di $y = -\sin(\pi x)$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\overbrace{-\frac{1}{x}}^{\to 0}} = 1$$

$y = 1$ è asintoto orizzontale destro.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se } x>0 \\ -\sin(\pi x) & \text{se } x\le 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= -x^{-1} \\ y' &= -(-1)x^{-1-1} \end{aligned}}$$

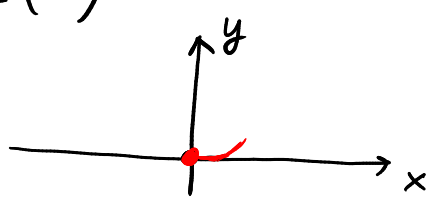
$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} & \text{se } x>0 \\ -\pi\cdot\cos(\pi x) & \text{se } x<0 \end{cases}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - \overbrace{f(0)}^{=0}}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} \underset{\substack{y=\frac{1}{x} \\ \text{se } x\to 0^+, \text{ allora } y\to+\infty}}{=} \lim_{y\to+\infty} y e^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\overset{+\infty}{y}}{\underset{+\infty}{e^y}} \overset{(H)}{=}$$

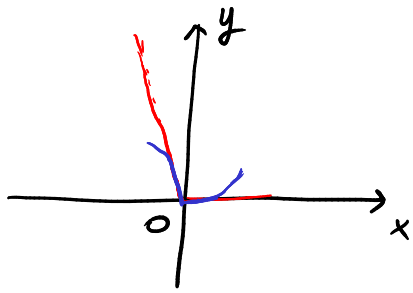
$$\overset{(H)}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = 0$$

$$\boxed{f'_+(0) = 0}$$



$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin(\pi x)}{x} = -\pi$$



$x=0$ è punto angoloso per f

$\mathrm{dom}(f') = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\qquad$ $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$

Punti stazionari

$\boxed{x>0}$ $\qquad f'(x)=0$

$$\frac{e^{-1/x}}{x^2} = 0$$ L'equazione non ha soluzioni reali

In $(0,+\infty)$ non ci sono punti stazionari

$\boxed{x<0}$ $\qquad f'(x)=0$

$$-\pi\cos(\pi x) = 0$$

$$\cos(\pi x) = 0$$

$$\pi x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$ con k intero e $k<0$

$$x = \frac{1}{2} + k$$

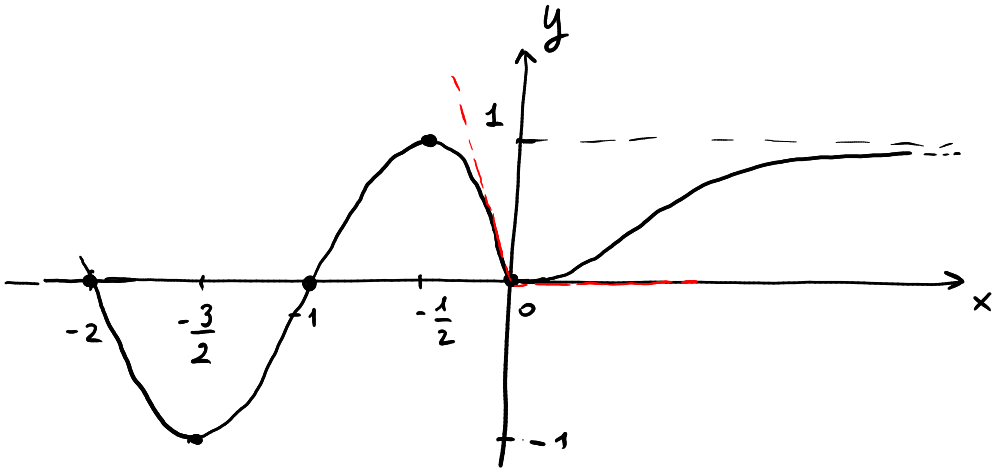
Sono punti stazionari $x=-\frac{1}{2}$, $x=-\frac{3}{2}$, $x-\frac{5}{2}$, ...

<u>Intervalli di monotonia di f</u>

$\boxed{x>0}$ $\qquad \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} > 0$ per ogni $x>0$

perchè $e^{-1/x} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $x^2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

f è strettamente crescente in $(0,+\infty)$



f è strettamente crescente in ciascuno degli intervalli $\left(-\frac{3}{2}+2k, -\frac{1}{2}+2k\right)$ con k intero e $k<0$

I punti $x=-\frac{1}{2}+2k$, con k intero e $k<0$, sono punti di massimo (relativo e) assoluto

I punti $x=-\frac{3}{2}+2k$, con k intero e $k<0$, sono punti di minimo (relativo e) assoluto

$x=0$ è punto di minimo relativo (non assoluto)