Esercitazione del 9 novembre 2023

1. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{e}\right)^n - \frac{n^2}{2^n}\cos(n!+2) + \frac{n\log(n+2)-\log(n+3)^n}{\cos\left(\frac{2}{n}\right)}\right].$$

2. In ciascuno dei seguenti esercizi è data una funzione $f\colon \operatorname{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

   (a) $f(x) = \sinh x$

   (b) $f(x) = \cosh x$

   (c) $f(x) = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

   (d) $f(x) = e^{e^x} + e^{-2} - 7^{2x}$

   (e) $f(x) = (\sqrt[3]{x^2} - 4)e^{3-x/2} + \sin 1$

   (f) $f(x) = ((7x+1)^5 - 1)^6 - 5\arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right)$

   (g) $f(x) = 2\log(x+8) - \dfrac{1}{4}\log^4(x+8)$

   (h) $f(x) = \dfrac{e^{-\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+5x\right)}}{5}$

   (i) $f(x) = |x|$

   (j) $f(x) = \dfrac{2|x|+1}{e^{1/x^2}}$

   (k) $f(x) = \log|2-3x| + \dfrac{1-x}{3x-2}$

   (l) $f(x) = \dfrac{x+2}{|x+2|}\cdot\dfrac{1}{3x^2+e^x}$

   (m) $f(x) = \arctan\dfrac{x+2}{2x+1}$

3. Calcolare i seguenti limiti applicando il teorema di De L'Hôpital.

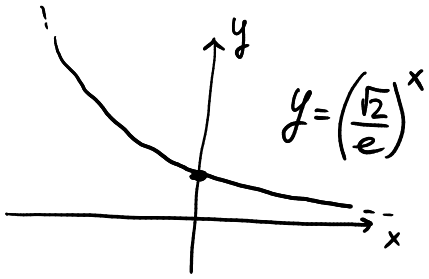
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x - x^2}{x^4}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{\sin^3 x}$

Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{e}\right)^n - \frac{n^2}{2^n}\cos(n!+2) + \frac{n\log(n+2)-\log(n+3)^n}{\cos\left(\frac{2}{n}\right)}\right]}_{a_n}$$

$\sqrt{2} < e$, quindi $0 < \frac{\sqrt{2}}{e} < 1$



$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{e}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{n^2}{2^n}}_{\to 0}\cos(n!+2) = 0$$

è una succ. limitata perchè $-1 \le \cos x \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

perchè n^2 è un infinito di ordine inferiore rispetto a 2^n

$$\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}\right) = \cos 0 = 1$$

per continuità della funzione coseno

Attenzione! $\log(n+3)^n$ significa $\log((n+3)^n)$ e non $(\log(n+3))^n$

$$\lim_{n\to+\infty} n\log(n+2) - \log(n+3)^n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\log(n+2) - n\log(n+3) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\cdot\left[\log(n+2)-\log(n+3)\right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\cdot\log\left(\frac{n+2}{n+3}\right) = \lim_{n\to+\infty} \log\left(\underbrace{\frac{n+2}{n+3}}_{\to 1}\right)^{\overset{\to+\infty}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \log\left(\frac{(n+3)-1}{n+3}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \log \underbrace{\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n}_{e^{-1}} = \log e^{-1} = -1$$

per continuità della funzione logaritmo naturale

ALTERNATIVA

$$\lim_{n\to+\infty} n \log\left(\frac{n+2}{n+3}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n \log\left(1-\frac{1}{n+3}\right) =$$

$\log(1+t) \sim t$ per $t \to 0$

$$= \lim_{n\to+\infty} n \cdot \left(-\frac{1}{n+3}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n}{n+3} = -1$$

Concludiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 - 0 + \frac{-1}{1} = -1 .$$

$$f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$y = e^{-x}$

$h(x) = e^{-x}$

$x \longmapsto -x \longmapsto e^{-x}$

$g(y) = e^{y}$ $\quad g'(y) = e^{y}$

$f(x) = -x$ $\quad f'(x) = -1$

$h(x) = g(f(x))$

$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$$h'(x) = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - (-e^{-x})\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) = \cosh x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(f') = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{x} + (-e^{-x})\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = \sinh x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(f') = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\left(\frac{g}{h}\right)'(x) = \frac{g'(x)\cdot f(x) - g(x) f'(x)}{[h(x)]^2}$$

$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$ perché $e^{x} + e^{-x} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} =$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\boxed{\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = e^{e^x} + e^{-2} - 7^{2x} \qquad \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^{e^x} + e^{-2} - e^{2x \cdot \log 7}$$

$$h(x) = e^{e^x} \qquad g(y) = e^y \qquad g'(y) = e^y$$

$$h(x) = g(f(x)) \qquad f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$$

$$h'(x) = g'(e^x) \cdot f'(x) = e^{e^x} \cdot e^x = e^{x + e^x}$$

$$h(x) = e^{2x \cdot \log 7} \qquad g(y) = e^y \qquad g'(y) = e^y$$

$$h(x) = g(f(x)) \qquad f(x) = 2x \cdot \log 7 \qquad f'(x) = 2\log 7$$

$$h'(x) = g'(2x \cdot \log 7) \cdot f'(x) = e^{2x \cdot \log 7} \cdot 2\log 7 = 7^{2x} \cdot 2\log 7$$

$$f(x) = e^{e^x} + e^{-2} - 7^{2x}$$

$$f'(x) = e^{e^x + x} - (2\log 7)\, 7^{2x}$$

$\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$

Non ci sono punti di non derivabilità

$$f(x) = \underbrace{\left(\sqrt[3]{x^2} - 4\right)}_{g(x)} \underbrace{e^{3-\frac{x}{2}}}_{h(x)} + \sin 1$$

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$(gh)'(x) = g'(x)h(x) + g(x)\cdot h'(x)$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x^2} - 4 = x^{2/3} - 4 \qquad g'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$h(x) = e^{3-\frac{x}{2}} \qquad h'(x) = e^{3-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

↑ funz. composta

↑ derivata dell'esponente

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 4\right) e^{3-\frac{x}{2}} + \sin 1$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \cdot e^{3-\frac{x}{2}} + \left(\sqrt[3]{x^2} - 4\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{3-\frac{x}{2}} =$$

$$= e^{3-\frac{x}{2}} \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2 \right)$$

$$\mathrm{dom}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(x) = \left((7x+1)^5 - 1\right)^6 \underbrace{- 5\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}_{\text{è una costante}}$$

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 7x+1 \longmapsto (7x+1)^5 - 1 \longmapsto \left((7x+1)^5-1\right)^6$$

$$f'(x) = 6\left((7x+1)^5 - 1\right)^5 \cdot 5(7x+1)^4 \cdot 7 =$$

$$= 210(7x+1)^4\left((7x+1)^5-1\right)^5$$

$$\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$$

Non ci sono punti di non derivabilità

Punti stazionari di f

$$f'(x) = 0$$

$$(7x+1)^4\left((7x+1)^5-1\right)^5 = 0$$

$$(7x+1)^4 = 0 \ \vee \ \left((7x+1)^5-1\right)^5 = 0$$

$$7x+1 = 0 \ \vee \ (7x+1)^5 = 1$$

$$x = -\frac{1}{7} \ \vee \ 7x+1 = 1$$

$$x = -\frac{1}{7} \ \vee \ x = 0$$

$-\frac{1}{7}$ e 0 sono punti stazionari per f

Studio del segno della derivata di f

$$(7x+1)^4 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La funzione $y = \sqrt[5]{x}$ è str. crescente in $\mathbb{R}$

$$\left((7x+1)^5-1\right)^5 \geq 0 \iff (7x+1)^5 - 1 \geq 0 \iff (7x+1)^5 \geq 1 \iff 7x+1 \geq 1$$

$$\iff x \geq 0$$

		$-\frac{1}{7}$		0	
$(7x+1)^4$	$+$	0	$+$		$+$
$((7x+1)^5-1)^5$	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$+$	$\searrow$	$+$	$\nearrow$

$f'(x) > 0 \iff x > 0$

$f'(x) < 0 \iff x < -\frac{1}{7} \vee -\frac{1}{7} < x < 0$

f è strettamente decrescente in ciascuno degli intervalli $\left(-\infty, -\frac{1}{7}\right)$ e $\left(-\frac{1}{7}, 0\right)$.

f è strettamente crescente in $(0, +\infty)$.

$$f(x) = 2\log(x+8) - \frac{1}{4}\log^4(x+8)$$

$$\mathrm{dom}(f) = (-8, +\infty)$$

$h(x) = \log(x+8)$ $\qquad g(y) = \log y$ $\qquad g(y) = \frac{1}{y}$

$h(x) = g(f(x))$ $\qquad f(x) = x+8$ $\qquad f'(x) = 1$

$$h'(x) = g'(x+8)\cdot f'(x) = \frac{1}{x+8}\cdot 1 = \frac{1}{x+8}$$

$h(x) = \log^4(x+8)$ $\qquad g(y) = y^4$ $\qquad g'(y) = 4y^3$

$h(x) = g(f(x))$ $\qquad f(x) = \log(x+8)$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x+8}$

$$h'(x) = g'(\log(x+8))\cdot\frac{1}{x+8} = \frac{4\log^3(x+8)}{x+8}$$

$$f(x) = 2\log(x+8) - \frac{1}{4}\log^4(x+8)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x+8} - \frac{1}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}\log^3(x+8)}{x+8} = \frac{2-\log^3(x+8)}{x+8}$$

$\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f)$ $\qquad$ Non ci sono punti di non derivabilità.

$$f(x) = \frac{e^{-\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 5x\right)}}{5}$$

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(x) = \frac{1}{5} \cdot e^{-\left(x^{-1/3} + 5x\right)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$h(x) = e^{-\left(x^{-1/3} + 5x\right)}$$

$$h(x) = g(f(x))$$

$$g(y) = e^{y} \qquad g'(y) = e^{y}$$

$$f(x) = -\left(x^{-1/3} + 5x\right) \qquad f'(x) = -\left(-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} + 5\right)$$

$$h'(x) = g'\left(-\left(x^{-1/3} + 5x\right)\right) \cdot f'(x) = e^{-\left(x^{-1/3} + 5x\right)}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} - 5\right)$$

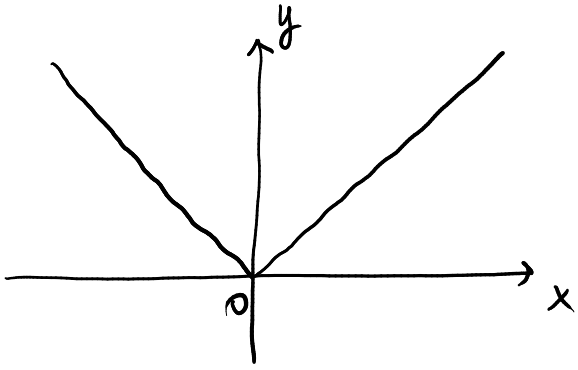
$$f(x) = \frac{1}{5} \cdot e^{-\left(x^{-1/3} + 5x\right)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} - 5\right) e^{-\left(x^{-\frac{1}{3}} + 5x\right)}$$

$$\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f)$$

Non ci sono punti di non derivabilità.

$$f(x) = |x|$$



$|x| = x$ se $x > 0$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$|x| = -x$ se $x < 0$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\text{dom}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

0 è un punto angoloso

$$f'(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(x) = \frac{2|x|+1}{e^{1/x^2}}$$

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(x) = (2|x|+1)\, e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$h(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-x^{-2}} \qquad g(y) = e^{y} \qquad g'(y) = e^{y}$$

$$h(x) = g(f(x)) \qquad f(x) = -x^{-2} \qquad f'(x) = -(-2)\cdot x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$h'(x) = g'(-x^{-2}) \cdot f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$$

Deriviamo il prodotto $f(x) = (2|x|+1)\, e^{-1/x^2}$

$$f'(x) = \left(2\frac{x}{|x|} + 0\right) e^{-1/x^2} + (2|x|+1) \cdot \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} =$$

$$= 2e^{-1/x^2}\left(\frac{x}{|x|} + \frac{2|x|}{x^3}\right) =$$

$$= 2e^{-1/x^2}\left(\frac{|x|}{x} + \frac{2|x|}{x^3}\right) = 2e^{-1/x^2} \cdot \frac{x^2|x| + 2|x|}{x^3} =$$

$$= 2e^{-1/x^2}|x| \cdot \frac{x^2+2}{x^3}$$

$\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f)$

Non ci sono punti di non derivabilità.

$$f(x) = \log|2-3x| + \frac{1}{3x-2}$$

$$\begin{cases} |2-3x| > 0 \\ 3x-2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2-3x \neq 0 \\ 3x-2 \neq 0 \end{cases} \iff x \neq \frac{2}{3}$$

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

derivata del logaritmo

derivata del modulo

$$f'(x) = \frac{1}{\cancel{|2-3x|}} \cdot \frac{\cancel{|2-3x|}}{2-3x} \cdot (-3) + \frac{0\cdot(3x-2) - 1\cdot 3}{(3x-2)^2}$$

$$x \longmapsto 2-3x \longmapsto |2-3x| \longmapsto \log|2-3x|$$

$$f'(x) = \frac{3}{3x-2} - \frac{3}{(3x-2)^2} = \frac{3(3x-2-1)}{(3x-2)^2} = \frac{9(x-1)}{(3x-2)^2}$$

$\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f)$ Non ci sono punti di non derivabilità.

$$f(x) = \frac{x+2}{|x+2|} \cdot \frac{1}{3x^2+e^x}$$

$$\begin{cases} |x+2| \neq 0 \\ \underbrace{3x^2}_{\geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}} + \underbrace{e^x}_{>0 \ \forall x \in \mathbb{R}} \neq 0 \end{cases} \iff x \neq -2 \qquad \text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

<u>Oss.</u> $3x^2 + e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x+2} \cdot \frac{1}{3x^2+e^x} & \text{se } x > -2 \\ \frac{x+2}{-(x+2)} \cdot \frac{1}{3x^2+e^x} & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3x^2+e^x} & \text{se } x > -2 \\ -\frac{1}{3x^2+e^x} & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x+2}{|x+2|} \cdot (3x^2+e^x)^{-1}$$

$h(x) = (3x^2+e^x)^{-1}$ $\qquad g(y) = y^{-1}$ $\qquad g'(y) = -y^{-2}$

$h(x) = g(f(x))$ $\qquad f(x) = 3x^2+e^x$ $\qquad f'(x) = 6x+e^x$

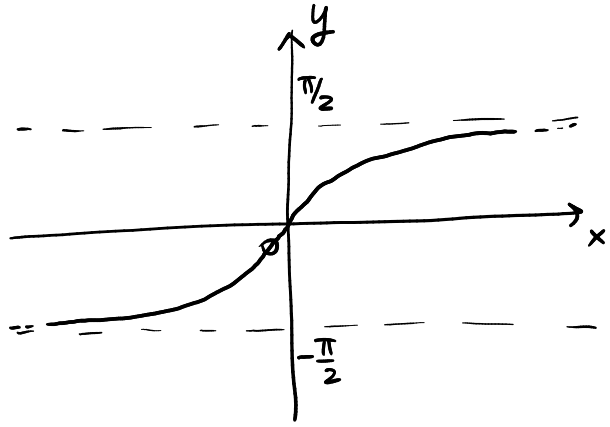
$$h'(x) = g'(3x^2+e^x) \cdot f'(x) = -\frac{6x+e^x}{(3x^2+e^x)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{x+2}{|x+2|} \cdot \frac{6x+e^x}{(3x^2+e^x)^2}$$

$$\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)$$

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$



$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^2} \cdot \frac{1\cdot(2x+1)-(x+2)\cdot 2}{(2x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{(x+2)^2}{(2x+1)^2}} \cdot \frac{2x+1-2x-4}{(2x+1)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{(2x+1)^2}}{(2x+1)^2+(x+2)^2} \cdot \frac{-3}{\cancel{(2x+1)^2}} = \frac{-3}{5x^2+8x+5}$$

$$\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f)$$

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{2-2\cos x - x^2}^{=f(x)}}{\underbrace{x^4}_{=g(x)}}$$

f e g sono continue e derivabili in $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2-2-0=0 \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

$$g'(x) = 4x^3 \quad \text{e} \quad g'(x) \neq 0 \text{ se } x \neq 0$$

Calcoliamo il limite del rapporto fra la derivata del numeratore e la derivata del denominatore

(La derivata del quoziente NON c'entra.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - 2x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2}^{1}(\sin x - x)}{{}_{2}\cancel{4}x^3}$$

È ancora una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ e siamo sotto le ipotesi del teor. di De L'Hôpital.

Calcoliamo nuovamente il limite del rapporto fra le derivate.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{6x^2} = -\frac{1}{12}$$

$$-\frac{1}{2}$$

Per il teorema di De L'Hôpital, si conclude che

$$\lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos x - x^2}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{2x-\sin 2x}^{=f(x)}}{\underbrace{\sin^3 x}_{=g(x)}}$$

f e g continue e derivabili in $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2\cdot 0 - \sin 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = (\sin 0)^3 = 0$$

$g'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x$ $\qquad$ $g'(x) \neq 0$ in un intorno di 0, eccetto 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x-\sin 2x}{\sin^3 x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2-(\cos 2x)\cdot 2}{3\sin^2 x\cdot\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos 2x)}{3\sin^2 x\cdot \underbrace{\cos x}_{\to 1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}4x^2}{3x^2} = \frac{4}{3}$$

$\sin^2 x \sim x^2$ per $x\to 0$

$1-\cos 2x \sim \frac{1}{2}(2x)^2$ per $x\to 0$