Esercitazione del 2 novembre 2023

1. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore e, se esistono, il massimo e il minimo dell'insieme immagine della successione
$$a_n = \cos(\arctan(n^2)), \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

2. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n!} + 2^{n!}}{\left(2-\frac{1}{n^2}\right)^{n!} + \left(2+\frac{1}{n!}\right)^{n!}}$.

3. (Prova d'esame 29 giugno 2009) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{[1-\cos\frac{1}{n}]^2 \log\left[\left(e^3+\frac{1}{n}\right)^n\right]}{\left(\sqrt{n+4}\right)^\alpha}.$$

4. Si consideri la funzione $f\colon \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-3} - \sqrt[3]{2x}}.$$
   (a) Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.
   (b) Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f.

5. (Prova in itinere 26 novembre 2010) Sia f la funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^\alpha \left[\cos\left(\dfrac{1}{x-1}\right) + \dfrac{4(e^{x-1}-1)}{2x-2}\right] & \text{se } x > 1, \\ 0 & \text{se } x \leqslant 1. \end{cases}$$
   Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $x = 1$. Negli altri casi classificare il tipo di discontinuità.

6. (Prova in itinere 16 novembre 2011) Si consideri la funzione $f\colon \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \sqrt{x^2+x} - \frac{\sqrt{x-7}\log(x-7)}{x} - \frac{1}{x-7}.$$
   (a) Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.
   (b) Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f.

7. (Prova in itinere 14 novembre 2019) Si consideri la funzione $f\colon \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \frac{1}{7}\log|x^2e^x - 1|.$$
   (a) Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.
   (b) Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f.

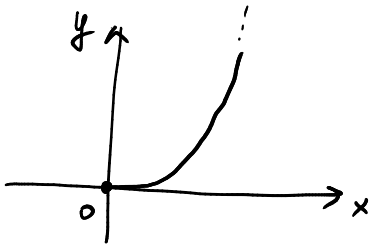
Successioni monotone

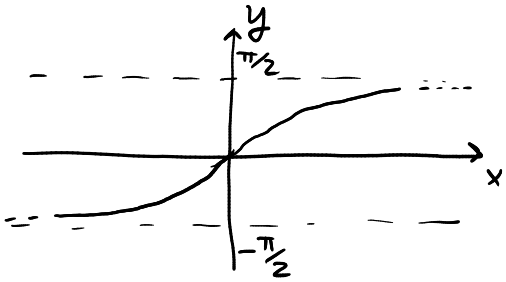
$$a_n = \cos(\arctan(n^2)) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Determinare sup e inf dell'insieme immagine della successione

$y = x^2$ è strettamente crescente in $[0, +\infty)$

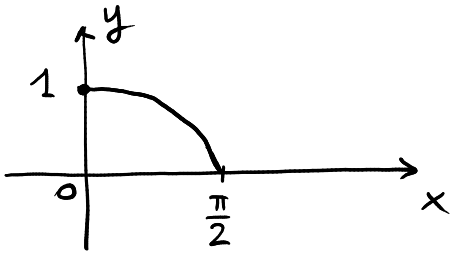
$y = \arctan x$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$





$$\arctan(n^2) \leq \arctan((n+1)^2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$0 \leq \arctan(n^2) < \frac{\pi}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



$y = \cos x$ è strettamente decrescente in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Quindi $\underbrace{\cos(\arctan(n^2))}_{= a_n} \geq \underbrace{\cos(\arctan(n+1)^2)}_{= a_{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

La successione $n \longmapsto a_n$ è monotona decrescente.

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = \lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \cos\Big(\underbrace{\arctan(\underbrace{n^2}_{+\infty})}_{\frac{\pi}{2}}\Big) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

0 è minimo dell'insieme $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\cos(\arctan(n^2)) = 0$.

Ma non esiste n tale che $\arctan(n^2) = \frac{\pi}{2}$.

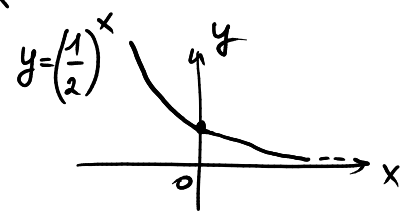
Dunque l'insieme considerato non ammette minimo.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \max_{n\in\mathbb{N}} a_n = a_0 = \cos\left(\arctan\left(0^2\right)\right) = \cos(0) = 1.$$

Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n!} + 2^{n!}}{\left(2-\frac{1}{n^2}\right)^{n!} + \left(2+\frac{1}{n!}\right)^{n!}} = a_n$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a \quad \forall a\in\mathbb{R}}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n!} + 2^{n!} = 2^{n!}\left(\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^{n!}}_{\substack{\text{per } n\to+\infty \\ \downarrow \\ 0}} + 1\right) \sim 2^{n!} \quad \text{per } n\to+\infty$$



$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n!}}{\left(2-\frac{1}{n^2}\right)^{n!} + \left(2+\frac{1}{n!}\right)^{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n!}}{\left[2\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)\right]^{n!} + \left[2\left(1+\frac{1}{2n!}\right)\right]^{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{2^{n!}}^{\,1}}{\cancel{2^{n!}}_{\,1}\left[\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^{n!} + \left(1+\frac{1}{2n!}\right)^{n!}\right]}$$

$$\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^{n!} = \left[\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}\right]^{\frac{n!}{2n^2}} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n\to+\infty$$

$\frac{n!}{2n^2} \to +\infty$ per confronto di infiniti

$\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2} \to \frac{1}{e}$

$$\left(1+\frac{1}{2n!}\right)^{n!} = \left[\left(1+\frac{1}{2n!}\right)^{2n!}\right]^{1/2} \longrightarrow e^{1/2} \quad \text{per } n\to+\infty$$

$\left(1+\frac{1}{2n!}\right)^{2n!} \to e$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{0+e^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \log\left[\left(e^3+\frac{1}{n}\right)^n\right]}{\left(\sqrt{n+4}\right)^\alpha} = a_n$$

$$(1-\cos t) \sim \frac{1}{2}t^2 \quad \text{per } t\to 0$$

$$\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2 \sim \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\right)^2 = \frac{1}{4n^4} \quad \text{per } n\to+\infty$$

$\sqrt{n+4} \sim \sqrt{n}$ per $n\to+\infty$ perché

$$\sqrt{n+4} = \sqrt{n\left(1+\frac{4}{n}\right)} = \sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\frac{4}{n}}$$

$\sqrt{1+\frac{4}{n}} \to 1$ per $n\to+\infty$

$$\left(\sqrt{n+4}\right)^{\alpha} \sim \left(\sqrt{n}\right)^{\alpha} = n^{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$\log(1+t) \sim t \quad \text{per } t \to 0$$

$$\log\left[\left(e^3 + \frac{1}{n}\right)^n\right] = n \log\left(e^3 + \frac{1}{n}\right) = n \log\left[e^3\left(1 + \frac{1}{n \cdot e^3}\right)\right] =$$

$$= n\left[\log e^3 + \log\left(1 + \frac{1}{n \cdot e^3}\right)\right] =$$

$$= n\left[3 + \underbrace{\log\left(1 + \frac{1}{n \cdot e^3}\right)}_{\substack{\text{per } n \to +\infty \\ 0}}\right] \sim 3n \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{4n^{\cancel{4}\,3}} \cdot 3\cancel{n}}{n^{\frac{\alpha}{2}}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3}{4n^{3+\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{3}{4} n^{-3-\frac{\alpha}{2}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < -6 \leftarrow \text{esp. di } n \text{ positivo} \\ \frac{3}{4} & \text{se } \alpha = -6 \leftarrow \text{esp. di } n \text{ uguale a } 0 \\ 0 & \text{se } \alpha > -6 \leftarrow \text{esp. di } n \text{ negativo} \end{cases}$$

$$\boxed{-3 - \frac{\alpha}{2}} > 0 \iff \frac{\alpha}{2} < -3 \iff \alpha < -6$$

esponente di n

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-3} - \sqrt[3]{2x}}$$

Studiare la continuità e determinare eventuali asintoti.

$$\sqrt[3]{2x-3} - \sqrt[3]{2x} \neq 0$$

$$\sqrt[3]{2x-3} \neq \sqrt[3]{2x} \qquad \text{dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\cancel{2x} - 3 \neq \cancel{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La funzione è continua in $\mathbb{R}$ perchè le funzioni polinomiali e la radice cubica sono funz. cont. in $\mathbb{R}$, quindi lo sono anche la loro composizione e la loro differenza. Numeratore e denominatore sono funz. continue e il denominatore è sempre non nullo in $\mathbb{R}$.

Non ci sono asintoti verticali (è una funz. continua in $\mathbb{R}$)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\boxed{\sqrt[3]{2x-3} - \sqrt[3]{2x}}}$$

Forma indeterminata $+\infty - \infty$

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt[3]{2x-3}}_{A} - \underbrace{\sqrt[3]{2x}}_{B}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(2x-3)^2} + \sqrt[3]{2x(2x-3)} + \sqrt[3]{(2x)^2}}{\sqrt[3]{(2x-3)^2} + \sqrt[3]{2x(2x-3)} + \sqrt[3]{(2x)^2}} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\overset{+\infty}{\sqrt[3]{(2x-3)^2}} + \overset{+\infty}{\sqrt[3]{2x(2x-3)}} + \overset{+\infty}{\sqrt[3]{(2x)^2}}}{(\cancel{2x}-3) - \cancel{2x}} = -\infty$$

Non ci sono asintoti orizzontali

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(2x-3)^2} + \sqrt[3]{4x^2-6x} + \sqrt[3]{4x^2}}{-3x} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{4} \cdot x^{2/3} \cdot \cancel{3}}{-\cancel{3}x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{4}}{-x^{1/3}} = 0$$

$$\sqrt[3]{(2x-3)^2} \sim \sqrt[3]{4x^2} = \sqrt[3]{4} \cdot x^{2/3} \quad \text{per } x \to \pm\infty$$

$$\sqrt[3]{4x^2-6x} \sim \sqrt[3]{4x^2} = \sqrt[3]{4} \cdot x^{2/3} \quad \text{per } x \to \pm\infty$$

Non ci sono asintoti obliqui per f.

Studiare la continuità in $x=1$ di

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x\leq 1 \\ (x-1)^{\alpha}\left[\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)+\frac{4(e^{x-1}-1)}{2x-2}\right] & \text{se } x>1 \end{cases}$$

al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=0 \quad \text{e} \quad f(1)=0$$

La funzione è continua da sinistra in $x=1$ per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{y\to 0^+} y^{\alpha}\left(\cos\frac{1}{y}+\frac{\cancel{4}^{\,2}(e^{y}-1)}{\cancel{2}_{\,1}\,y}\right)$$

$y=x-1$

se $x\to 1^+$ allora $y\to 0^+$

per $y\to 0^+$ $\downarrow$ 1

$$\lim_{y\to 0^+} y^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha>0 \\ 1 & \text{se } \alpha=0 \\ +\infty & \text{se } \alpha<0 \end{cases}$$

Per $y\to 0^+$ non ha limite $\cos\frac{1}{y}$

Per ogni $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ si ha $-1\leq\cos\frac{1}{y}\leq 1$

- Caso $\alpha=0$

non ha limite

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{y\to 0^+}\left(\cos\frac{1}{y}+\frac{2(e^{y}-1)}{y}\right)$$

$\to 1$

Se $\alpha = 0$, non esiste $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, dunque $x = 1$ è un p.to di discontinuità di II specie per f

. Caso $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{y \to 0^+} \left(\underbrace{y^\alpha \cdot \cos \frac{1}{y}}_{0} + \underbrace{y^\alpha \cdot 2 \frac{(e^y - 1)}{y}}_{0} \right) = 0$$

perchè prodotto di una funz. infinitesima e di una funz. limitata

Se $\alpha > 0$, allora la funzione f è continua in $x = 1$.

. Caso $\alpha < 0$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{y \to 0^+} \underbrace{y^\alpha}_{+\infty} \cdot \left(\underbrace{\cos \frac{1}{y}}_{\text{compreso fra } -1 \text{ e } 1} + \underbrace{\frac{2 \cdot (e^y - 1)}{y}}_{2} \right)$$

$\lim_{y \to 0^+} \frac{2(e^y - 1)}{y} = 2$ significa che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid \forall y \in (0, \delta) \ 2 - \varepsilon < \frac{2(e^y - 1)}{y} < 2 + \varepsilon,$$

quindi, prendendo $\varepsilon = \frac{1}{2}$, si può trovare $\delta > 0$ t.c. $\frac{2(e^y - 1)}{y} > 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \forall y \in (0, \delta)$

Quindi per ogni $y \in (0,\delta)$ si ha

$$\frac{2(e^y-1)}{y} + \cos\frac{1}{y} \geq \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$y^\alpha \cdot \left(\cos\frac{1}{y} + \frac{2(e^y-1)}{y}\right) \geq \frac{1}{2} y^\alpha \xrightarrow{y \to 0^+} +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{y \to 0^+} y^\alpha \left(\cos\frac{1}{y} + \frac{2(e^y-1)}{y}\right) = +\infty$$

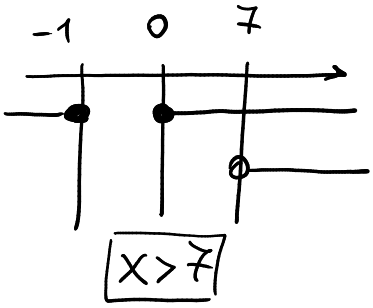
Se $\alpha > 0$, allora $x = 1$ è un punto di infinito per f.

$$f(x) = \sqrt{x^2+x} - \frac{\sqrt{x-7}\,\log(x-7)}{x} - \frac{1}{x-7}$$

$$\begin{cases} x^2+x \geq 0 & \leftarrow \sqrt{x^2+x} \text{ deve essere definito} \\ x-7 \geq 0 & \leftarrow \sqrt{x-7} \\ x-7 > 0 & \leftarrow \log(x-7) \\ x \neq 0 & \leftarrow x \text{ al denominatore} \\ x-7 \neq 0 & \leftarrow x-7 \text{ al denominatore} \end{cases}$$

è equivalente a

$$\begin{cases} x^2+x \geq 0 \\ x-7 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 0 \\ x > 7 \end{cases}$$



$\mathrm{dom}(f) = (7, +\infty)$

f non è nè pari nè dispari, perchè $\mathrm{dom}(f)$ non è simmetrico rispetto a 0.

$$\lim_{x \to 7^+} \sqrt{x-7}\,\log(x-7) \underset{\substack{y = x-7 \\ \text{se } x \to 7^+ \text{ allora } y \to 0^+}}{=} \lim_{y \to 0^+} y^{1/2} \log y \underset{\substack{y = \frac{1}{t} \\ \text{se } y \to 0^+ \text{ allora } t \to +\infty}}{=} \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{1/2}} \cdot \log\left(\frac{1}{t}\right) =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \underbrace{\frac{-\log t}{t^{1/2}}}_{0} = 0$$

$$\boxed{\text{Se } \alpha > 0 \text{ e } \beta > 0, \text{ allora } \lim_{t \to +\infty} \frac{(\log t)^\alpha}{t^\beta} = 0}$$

$$\lim_{x\to 7^+} f(x) = \lim_{x\to 7^+}\left(\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{\sqrt{7^2+7}} - \frac{\overbrace{\sqrt{x-7}\,\log(x-7)}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 7}} - \frac{1}{\underbrace{x-7}_{\to 0^+}}\right) =$$

Algebra dei limiti

$$= \sqrt{56} - 0 - \infty = -\infty$$

$x=7$ è asintoto verticale destro per f

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-7}\,\log(x-7)}{x} \underset{y=x-7}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{y^{1/2}\cdot\log y}{y+7} =$$

se $x\to+\infty$ allora $y\to+\infty$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{y^{1/2}\cdot\log y}{y\left(1+\frac{7}{y}\right)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\overbrace{\log y}^{\to 0}}{\underbrace{y^{1/2}}_{\to 0}\underbrace{\left(1+\frac{7}{y}\right)}_{\to 1}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\underbrace{x^2+x}_{\to+\infty}} - \underbrace{\frac{\sqrt{x-7}\,\log(x-7)}{x}}_{\to 0} - \frac{1}{\underbrace{x-7}_{\to+\infty}}\right) =$$

$$= +\infty - 0 - 0 = +\infty$$

Non ci sono asintoti orizzontali per f

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} - \overbrace{\frac{\sqrt{x-7}\,\log(x-7)}{x^2}}^{\to 0} - \overbrace{\frac{1}{x(x-7)}}^{\to 0}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1$$

se $x>0$, allora $|x|=x$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1-0-0 = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x)-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \underbrace{\frac{\sqrt{x-7}\,\log(x-7)}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{x-7}}_{\to 0} - x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{\underbrace{1+\frac{1}{x}}_{\to 1}}+1\right)} = \frac{1}{2}$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x)-x\right) = \frac{1}{2}-0-0 = \frac{1}{2}$$

$y = x+\frac{1}{2}$ è asintoto obliquo per f

Prova in itinere 2019

$$f(x) = \frac{1}{7} \log |x^2 e^x - 1|$$

$x^2 e^x - 1 = 0$ equivale a

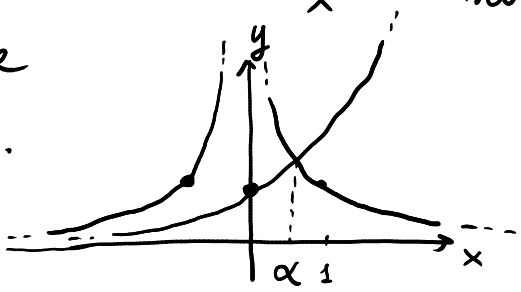
$x^2 e^x = 1$

$e^x = \frac{1}{x^2}$ perchè $x=0$ non è soluzione

$x^2 e^x - 1 \neq 0$

$x \neq \alpha$,

dove α è l'unica soluzione dell'equazione $x^2 e^x - 1 = 0$.



$$\lim_{x \to \alpha^\pm} f(x) = \lim_{x \to \alpha^\pm} \frac{1}{7} \log \underbrace{|x^2 e^x - 1|}_{0^+} = -\infty$$

$x = \alpha$ è asintoto verticale completo per f

Da completare: eventuali as. orizzontali e obliqui.