# Esercitazione del 26 ottobre 2023

1. Fissati $\alpha > 0$ e $q > 1$, calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{q^n}$.

2. Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!}$.

3. Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n + \frac{1}{n!} + n^{2023}}{e^n + \arctan(n^n)}$.

4. Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} (e^n - n^{\sqrt{n}})$.

5. Calcolare il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{\sin x} - 1\right)\tan x}{1 - \cos x}$.

6. Calcolare il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$.

7. Calcolare il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}$.

8. Studiare la continuità della funzione $f\colon \left(-\frac{\pi}{2}, +\infty\right) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(3x)\arctan(2x)}{1-\cos(4x)} & \text{se } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ 18 & \text{se } x = 0 \\ \left(\dfrac{4}{x^2} - 1\right)(1 - \cos 3x) & \text{se } x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

9. Si consideri la funzione $f\colon \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x - 2x^2}\right).$$

   (a) Determinare il dominio di $f$ ed eventuali simmetrie.

   (b) Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per $f$.

10. (Prova in itinere 13 novembre 2009) Sia data la seguente funzione $f$ reale di variabile reale definita da

$$f(x) = \arcsin(e^{-7x}) + \frac{x-2}{3} - \frac{\sin x}{2x}.$$

   (a) Determinare il dominio di $f$ ed eventuali simmetrie.

   (b) Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per $f$.

11. (Tema d'esame 20 gennaio 2011) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(e^x - 1)^8}{x^\alpha (\log(1+x))^2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Discutere la continuità di $f$ in $x = 0$ al variare di $\alpha$ e classificare le eventuali discontinuità.

$n \longmapsto \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \cdot n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n} = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

---

$n \longmapsto n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

<u>Osservazione</u>. Il criterio del rapporto non permette di concludere nulla sul comportamento della succ. $a_n$ considerata se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

---

Fissati $\alpha > 0$ e $q > 1$, calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = a_n$$

$a_n > 0 \quad \forall n \geq 1$

Proviamo a calcolare $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{q^{n+1}} \cdot \frac{q^n}{n^\alpha} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \cdot \frac{q^n}{q^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)}_{\text{per } n\to+\infty \;\; 1}\right)^{\alpha} \cdot \frac{\cancel{q^{n}}\, q^{1}}{\cancel{q^{n}} \cdot q} = \frac{1}{q}$$

1 perchè la funzione $y = x^{\alpha}$ è continua

Dato che $q > 1$, si ha $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{q} < 1$

Per il criterio del rapporto, si conclude che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\alpha}}{q^{n}} = 0.$$

Si dice che la succ. $n \longmapsto n^{\alpha}$ ha ordine di infinito inferiore rispetto alla succ. $n \longmapsto q^{n}$.

---

Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n}}{n!} = a_n$

$n \in \mathbb{N}$

$n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

$0! = 1, \; 1! = 1$

$\frac{n^{n}}{n!} > 0$ se $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

Calcoliamo $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n}\cdot(n+1)}{n^{n}} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \cdot \frac{(n+1)\,n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{e} \cdot \frac{\cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+1)!}} = e$$

Dato che $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e > 1$, per il criterio del rapporto si conclude che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty.$$

Si dice che la successione $n \longmapsto n^n$ ha ordine di infinito superiore rispetto alla successione $n \mapsto n!$

---

Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\overset{+\infty}{2^n} + \underset{\to 0}{\frac{1}{n!}} + \overset{+\infty}{n^{2023}}}{\underset{+\infty}{e^n} + \underset{\to +\frac{\pi}{2}}{\arctan(n^n)}}$

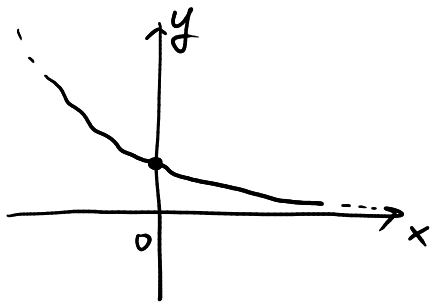
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n + \frac{1}{n!} + n^{2023}}{e^n + \arctan(n^n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n\left(1 + \frac{1}{n!\cdot 2^n} + \frac{n^{2023}}{2^n}\right)}{e^n\left(1 + \frac{\arctan(n^n)}{e^n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{e}\right)^n}_{\to 0} \cdot \frac{1 + \overset{\to 0}{\frac{1}{n!\cdot 2^n}} + \underset{\to 0}{\frac{n^{2023}}{2^n}}}{1 + \underset{\to 0}{\frac{\arctan(n^n)}{e^n}}}$$

per confronto di infiniti

$$= 0 \cdot 1 = 0$$

$y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$




perchè $0 < \frac{2}{e} < 1$

Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\left(e^n - n^{\sqrt{n}}\right)$

$$n^{\sqrt{n}} = e^{\log n^{\sqrt{n}}} = e^{\sqrt{n}\cdot\log n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(e^n - e^{\sqrt{n}\cdot\log n}\right) = \lim_{n\to+\infty} e^n\left(1 - \frac{e^{\sqrt{n}\cdot\log n}}{e^n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{e^n}_{+\infty}\left(1 - \underbrace{e^{\overbrace{\sqrt{n}\cdot\log n - n}^{-\infty}}}_{0}\right) = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\cdot\log n - n = \lim_{n\to+\infty} n\left(\underbrace{\frac{\log n}{n^{1/2}}}_{0 \text{ per confronto di infiniti}} - 1\right) = -\infty$$

$x_0 \in \mathbb{R}$ oppure $x_0 = +\infty$ oppure $x_0 = -\infty$

$f_1, f_2, g_1, g_2$ funzioni reali definite in un intorno di $x_0$ eccetto al più $x_0$.

Se $f_1, f_2, g_1, g_2$ sono infinitesime per $x \to x_0$ e $f_1 \sim g_1$ per $x \to x_0$ e $f_2 \sim g_2$ per $x \to x_0$, allora $f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$ per $x \to x_0$.

Se inoltre $f_2(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$ e $g_2(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$, allora $\dfrac{f_1}{f_2} \sim \dfrac{g_1}{g_2}$ per $x \to x_0$.

---

$\sin x \sim x$ per $x \to 0$ $\qquad$ $\tan x \sim x$ per $x \to 0$

$(1 - \cos x) \sim \frac{1}{2} x^2$ per $x \to 0$

$(e^x - 1) \sim x$ per $x \to 0$ $\qquad$ $\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$

---

Calcolare $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(e^{\sin x} - 1) \cdot \tan x}{1 - \cos x}$

$(e^t - 1) \sim t$ per $t \to 0$

Dato $\sin x \to 0$ per $x \to 0$, per il teorema di sostituzione, si ha $(e^{\sin x} - 1) \sim \sin x$ per $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^{\sin x} - 1) \cdot \tan x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x) \cdot \cancel{x}}{\frac{1}{2} x^{\cancel{2}}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} 2 \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} = 2$$

Calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{\boxed{\log(\cos x)}}{x^2}$ $\cos x \to 1$, $\log(\cos x) \to 0$, $x^2 \to 0$

$\log(1+t) \sim t$ per $t \to 0$

$\log(\cos x) = \log(1 + \boxed{(\cos x - 1)}) \sim (\cos x - 1)$ per $x \to 0$

$\downarrow$ per $x \to 0$

$0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

---

Calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x}$

$x = \tan y$

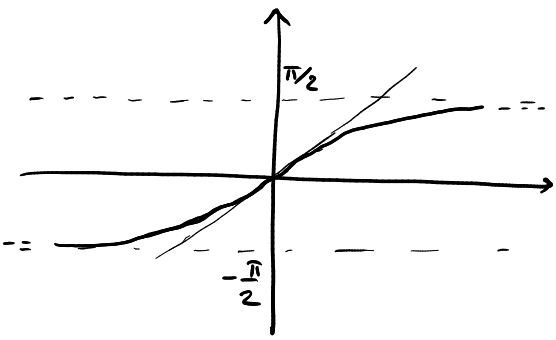
Se $x \to 0$ allora $y \to 0$

$\arctan(\tan y) = y \quad \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{\arctan(\tan y)}{\tan y} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\tan y} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \left(\frac{\tan y}{y}\right)^{-1} = 1$$

$\arctan x \sim x$ per $x \to 0$



$f: \left(-\frac{\pi}{2}, +\infty\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(3x)\arctan(2x)}{1-\cos(4x)} & \text{se } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ 18 & \text{se } x = 0 \\ \left(\dfrac{4}{x^2} - 1\right)\left(1-\cos(3x)\right) & \text{se } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Studiamo la continuità di $f$.

$f$ è continua in $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ed è continua in $(0, +\infty)$

Resta da analizzare la continuità in $x=0$.

$f(0) = 18$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(3x)\cdot\arctan(2x)}{1-\cos(4x)} =$$

Per $x \to 0$
$\sin(3x) \sim 3x$
$\arctan(2x) \sim 2x$
$(1-\cos(4x)) \sim \frac{1}{2}\cdot(4x)^2$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{3x\cdot 2x}{\frac{1}{2}\cdot(4x)^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{6x^2}{8x^2} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\left(\frac{4}{x^2} - 1\right)}_{\to +\infty} \underbrace{\left(1-\cos(3x)\right)}_{\to 0} =$$

$(1-\cos(3x)) \sim \frac{1}{2}(3x)^2$ per $x \to 0$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{4-x^2}{x^2}\cdot\frac{1}{2}(3x)^2 =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{4-x^2}^{\to 4}}{\cancel{x^2}}\cdot\frac{9}{2}\cancel{x^2} = 4\cdot\frac{9}{2} = 18$$

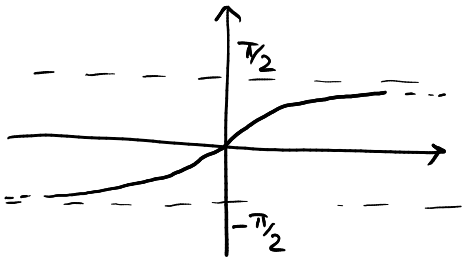
$f(0) = 18, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{3}{4}, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 18$

0 è un punto di salto per f

(La funzione è continua da destra in $x=0$)

$f: \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x-2x^2}\right)$$



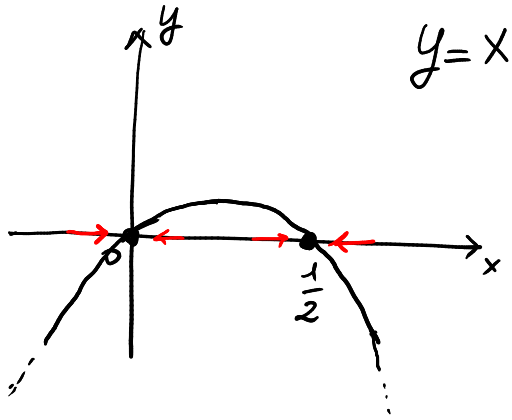

- Dominio e simmetrie

$$x - 2x^2 \neq 0$$
$$x(1-2x) \neq 0$$
$$x \neq 0 \ \wedge \ x \neq \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$$

Il dominio di $f$ non è simmetrico rispetto a $0$ (perché $\frac{1}{2} \notin \mathrm{dom}(f)$ e $-\frac{1}{2} \in \mathrm{dom}(f)$), dunque la funzione non è né pari né dispari.

- Asintoti verticali




$y = x - 2x^2$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) =$$

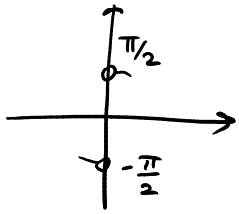
$$\lim_{x \to 0^-} \arctan\left(\frac{1}{\underbrace{x-2x^2}_{\to 0^-}}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$\to -\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{\underbrace{x-2x^2}_{\to 0^+}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$\to +\infty$

$x = 0$ non è asintoto verticale per $f$



$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \arctan\left(\frac{1}{\underbrace{x-2x^2}_{\to 0^+}}\right)^{\to +\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} \arctan\left(\frac{1}{\underbrace{x-2x^2}_{\to 0^-}}\right)^{\to -\infty} = -\frac{\pi}{2}$$

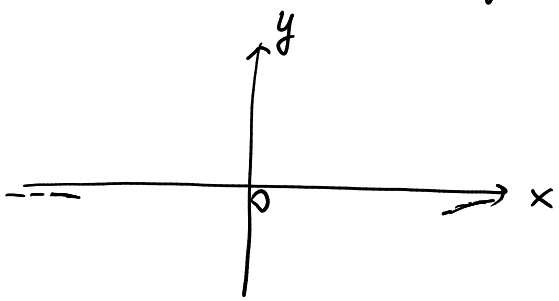
$x = \frac{1}{2}$ non è asintoto verticale per $f$

NON ci sono asintoti verticali per $f$

- Asintoti orizzontali

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \arctan\left(\frac{1}{\underbrace{x-2x^2}_{\to -\infty}}\right)^{\to 0} \overset{\text{CONTINUITÀ DI ARCOTANGENTE}}{=} \arctan 0 = 0$$

$y=0$ è asintoto orizzontale completo per $f$




(Non ci sono asintoti obliqui per $f$)

$f: \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \arcsin\left(e^{-7x}\right) + \frac{x-2}{3} - \frac{\sin x}{2x}$$

- Dominio e simmetrie

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ -1 \leq e^{-7x} \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ e^{-7x} \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ e^{-7x} \leq e^{0} \end{cases}$$

$e^{-7x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\iff \begin{cases} x \neq 0 \\ -7x \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff x > 0$$

$$\mathrm{dom}(f) = (0, +\infty)$$

Il dominio di $f$ non è simmetrico rispetto a $0$, quindi la funzione non è né pari né dispari.

- Asintoti verticali

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left( \arcsin\left(\overset{1}{e^{-7x}}\right) + \overset{-\frac{2}{3}}{\frac{x-2}{3}} - \overset{1}{\frac{\sin x}{2x}} \right) =$$

$$= \arcsin 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{7}{6}$$

$x = 0$ non è asintoto verticale per $f$

<u>Non</u> ci sono asintoti verticali per $f$

. Asintoti orizzontali

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\arcsin\left(\underbrace{e^{-7x}}_{0}\right)}_{\arcsin 0 = 0} + \underbrace{\frac{x-2}{3}}_{+\infty} - \underbrace{\frac{\sin x}{2x}}_{0}\right) = +\infty$$

Non ci sono asintoti orizzontali per $f$

. Asintoti obliqui $y = mx + q$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{\arcsin\left(e^{-7x}\right)}{x}}_{0} + \underbrace{\frac{x-2}{3x}}_{\frac{1}{3}} - \underbrace{\frac{\sin x}{2x}}_{0}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\right) = \frac{1}{3}$$

$$q = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - mx\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\arcsin\left(e^{-7x}\right) - \frac{\sin x}{2x} + \frac{x-2}{3} - \frac{1}{3}x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\arcsin\left(e^{-7x}\right)}_{0} - \underbrace{\frac{\sin x}{2x}}_{0} + \cancel{\frac{1}{3}x} - \frac{2}{3} - \cancel{\frac{1}{3}x}\right) = -\frac{2}{3}$$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ è asintoto obliquo destro per $f$.

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato.

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(e^x-1)^8}{x^\alpha (\log(1+x))^2} & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Studiare la continuità di $f$ in $x=0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ ed eventualmente classificare la discontinuità.

$f(0)=0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(e^x-1)^8}{x^\alpha \cdot (\log(1+x))^2} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (e^x-1) \sim x \text{ per } x\to 0 \\ \log(1+x) \sim x \text{ per } x \to 0 \end{array}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^8}{x^\alpha \cdot x^2} = \lim_{x\to 0^+} x^{6-\alpha} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } 6-\alpha>0 \\ 1 & \text{se } 6-\alpha=0 \\ +\infty & \text{se } 6-\alpha<0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha<6 \\ 1 & \text{se } \alpha=6 \\ +\infty & \text{se } \alpha>6 \end{cases}$$

Se $\alpha<6$, allora $f$ è continua in $x=0$

Se $\alpha=6$, allora $x=0$ è un punto di salto per $f$

Se $\alpha>6$, allora $x=0$ è un punto di infinito per $f$