Esercitazione del 10 ottobre 2023

1. (Tema d'esame 3 luglio 2017) Determinare il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{\mathrm{Re}(ze^{i\frac{\pi}{4}})[(z+3)\overline{z}+|z+3|^2]}{7z+1+i}=0.$$

2. (Tema d'esame 16 aprile 2019) Determinare le radici cubiche del numero complesso

$$w=\frac{2^{-|1-i\sqrt{19}|^2}(7+7i)(1-i)^{40}}{2i^{32}+e^{3i\pi}},$$

lasciando scritte le radici in forma esponenziale.

3. (Tema d'esame 10 gennaio 2013) Determinare l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases}(|z|+\mathrm{Re}\,z)^2(\mathrm{Im}\,z-3\mathrm{Re}\,z+4)\geqslant 0\\ \left|z-\dfrac{4}{3}\right|\leqslant 1.\end{cases}$$

4. (Tema d'esame 10 aprile 2017) Determinare il luogo geometrico A dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\left|e^{z^2}\right|+\mathrm{Im}(z^2+\overline{z}^2)=\left|e^{7i|z|}\right|.$$

5. (Tema d'esame 1 aprile 2015) Determinare il luogo geometrico A dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$(|\mathrm{Re}(z)|+3|\mathrm{Im}(z)|)\left(z\overline{z}-(\mathrm{Re}(z))^2-ie^{\frac{3}{2}\pi i}-\frac{z+\overline{z}}{2}\right)=0.$$

6. (Tema d'esame 3 settembre 2012) Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ appartenenti all'intersezione $A \cap B$, dove

$$A=\{z\in\mathbb{C}: z^4+2^4=0\} \qquad \text{e} \qquad B=\left\{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Im}\,z-\frac{1}{2}|\mathrm{Re}\,z|<0\right\}.$$

7. (Tema d'esame 12 luglio 2022 modificato) Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ del sistema

$$\begin{cases}z^4=7e^{8\pi i}\left[z\overline{z}-|z|^2+\mathrm{Im}\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}\right)\right]\\ \mathrm{Re}(\mathrm{Im}(2z))\geqslant \mathrm{Im}(\mathrm{Re}(7z)).\end{cases}$$

8. (Tema d'esame 3 settembre 2009) Calcolare le radici complesse dell'equazione $z^4-i|i-1|^2z=0$.

Conclusione dell'ultimo esercizio del 5 ottobre 2023

(Tema d'esame 30 gennaio 2017) Scrivere in forma cartesiana le radici cubiche complesse del numero $w = (1-i)^6|e^{3+i}|$.

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^3 = (1-i)^6 \, |e^{3+i}|$$

$$|e^{3+i}| = |e^3 \cdot e^i| = e^3 \cdot |e^i| =$$

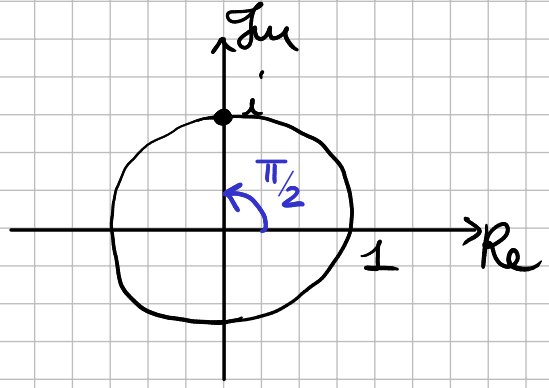
$$= e^3 |\cos 1 + i \sin 1| = e^3 \sqrt{\cos^2 1 + \sin^2 1} = e^3$$

$$\boxed{\begin{array}{l} |e^{i\vartheta}| = 1 \text{ per ogni } \vartheta \in \mathbb{R} \\ |e^z| = |e^{\mathrm{Re}\, z} \cdot e^{i\, \mathrm{Im}\, z}| = |e^{\mathrm{Re}\, z}| \quad \forall z \in \mathbb{C} \end{array}}$$

$$w = (1-i)^6 e^3 =$$

$$= e^3 \left((1-i)^2\right)^3 = e^3 (-2i)^3 = -8e^3 \cdot (-i) = 8e^3 \cdot i$$

$$w = 8e^3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$



Risolviamo in $\mathbb{C}$

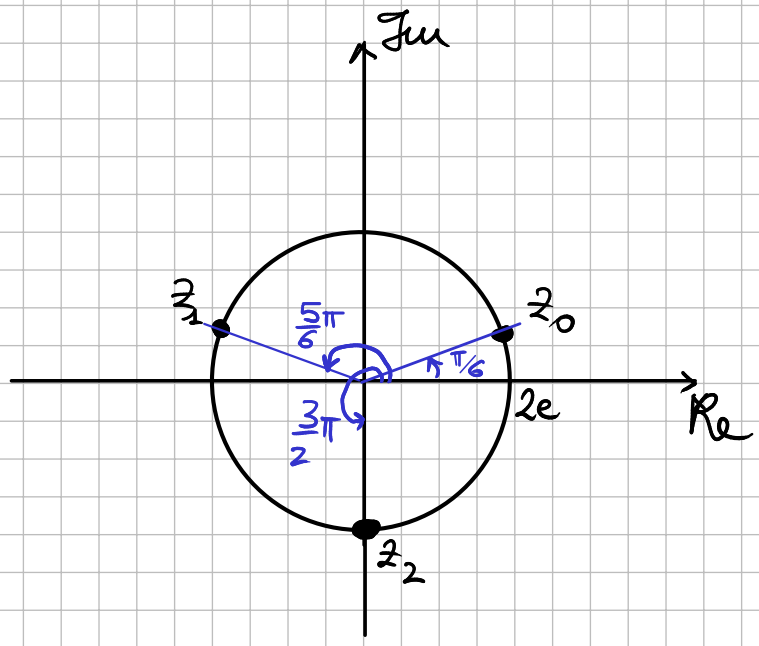
$$z^3 = 8e^3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Le soluzioni sono $z_k = \sqrt[3]{8e^3} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ $(k = 0, 1, 2)$

$$z_0 = 2e \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = e(\sqrt{3} + i)$$

$$z_1 = 2e \cdot e^{i\frac{5}{6}\pi} = 2e\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = e(-\sqrt{3} + i)$$

$$z_2 = 2e \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi} = 2e \cdot (-i) = -2ei$$



(Tema d'esame 3 luglio 2017) Determinare il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{\mathrm{Re}(ze^{i\frac{\pi}{4}})[(z+3)\overline{z}+|z+3|^2]}{7z+1+i}=0.$$

$$\frac{\mathrm{Re}\left(z\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left[(z+3)\overline{z}+|z+3|^2\right]}{7z+1+i}=0$$

C.E. $7z+1+i\neq 0$

$7z\neq -1-i$

$z\neq -\frac{1}{7}-\frac{i}{7}$

$z=x+iy$, con $x,y\in\mathbb{R}$

In $\mathbb{R}^2$

$(x,y)\neq\left(-\frac{1}{7},-\frac{1}{7}\right)$

$$\mathrm{Re}\left((x+iy)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)\left[x^2+y^2+3x-3iy+|(x+3)+iy|^2\right]=0$$

$$\mathrm{Re}\left((x+iy)\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1+i)\right)\left[x^2+y^2+3x-3iy+(x+3)^2+y^2\right]=0$$

$$\mathrm{Re}(\alpha z)=\alpha\cdot\mathrm{Re}(z)\quad\forall\alpha\in\mathbb{R}\quad\forall z\in\mathbb{C}$$

$$\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}\,\mathrm{Re}\left(x-y+iy+ix\right)\left[x^2+y^2+3x-3iy+x^2+6x+9+y^2\right]=0$$

$$\mathrm{Re}\left(\underbrace{x-y}_{\text{parte reale}}+i\underbrace{(y+x)}_{\text{parte immaginaria}}\right)=0 \vee \underbrace{2x^2+2y^2+9x+9}_{\text{parte reale}}\underbrace{-3iy}_{\text{parte immaginaria}}=0$$

$$x-y=0 \vee \begin{cases}2x^2+2y^2+9x+9=0\\-3y=0\end{cases}$$

$$y=x \vee \begin{cases}2x^2+9x+9=0\\y=0\end{cases}$$

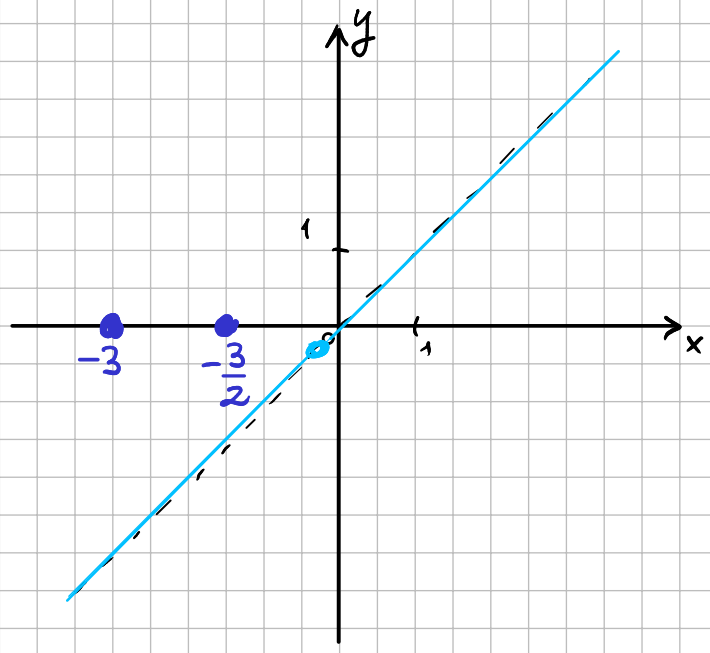
$\Delta=9^2-8\cdot 9=3^2$

$x=\frac{-9\pm 3}{4}$

$$y=x \vee \begin{cases}x=-3\\y=0\end{cases} \vee \begin{cases}x=-\frac{3}{2}\\y=0\end{cases}$$

C.E.

$(x,y)\neq\left(-\frac{1}{7},-\frac{1}{7}\right)$



Il luogo geometrico cercato è l'unione della bis. del I e III quadrante, privata di $\left(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}\right)$, e dell'insieme $\left\{(-3,0), \left(-\frac{3}{2},0\right)\right\}$

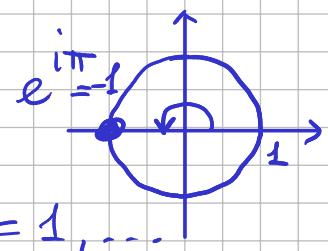
(Tema d'esame 16 aprile 2019) Determinare le radici cubiche del numero complesso

$$w = \frac{2^{-|1-i\sqrt{19}|^2}(7+7i)(1-i)^{40}}{2i^{32}+e^{3i\pi}},$$

lasciando scritte le radici in forma esponenziale.

$$z^3 = w, \quad \text{con} \quad w = \frac{2^{-|1-i\sqrt{19}|^2}(7+7i)(1-i)^{40}}{2i^{32}+e^{3i\pi}}$$

$$2i^{32}+e^{3i\pi} = 2\cdot 1 - 1 = 1$$



$$i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1, \dots$$

$$w = 2^{-|1-i\sqrt{19}|^2}\cdot 7(1+i)(1-i)^{40} =$$

$$= 2^{-(1^2+\sqrt{19}^2)}\cdot 7(1+i)(1-i)^{40} =$$

$$= 2^{-20}\cdot 7(1+i)(1-i)^{40}$$

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$w = 2^{-20}\cdot 7\cdot\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\left(2^{1/2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{40} =$$

$$= \cancel{2^{-20}}\cdot 7\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\cancel{2^{20}}e^{-i\cdot 10\pi} =$$

$$\boxed{e^{-10i\pi} = 1}$$

$$= 7\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Risolviamo in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^3 = 7\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

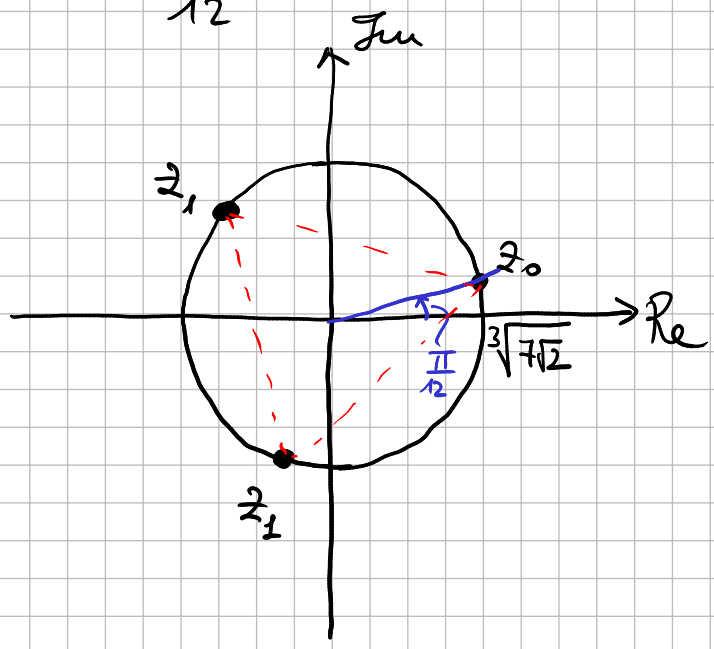
Le soluzioni sono $z_k = \sqrt[3]{7\sqrt{2}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k = 0, 1, 2$

$$z_0 = \sqrt[3]{7\sqrt{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{7\sqrt{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi\right)} = \sqrt[3]{7\sqrt{2}}\, e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{7\sqrt{2}} \cdot e^{i\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi\right)} = \sqrt[3]{7\sqrt{2}}\, e^{i\frac{17}{12}\pi}$$

$$\frac{\pi}{12}\ \text{rad} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$$



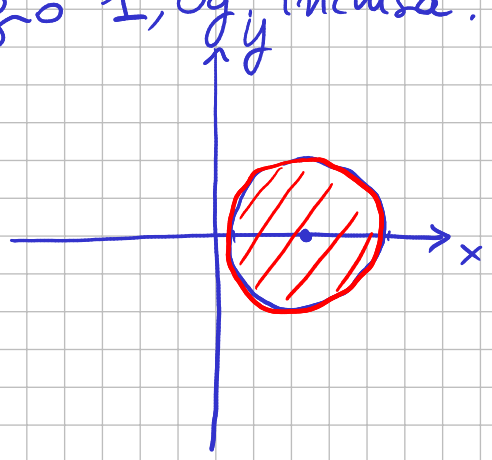
(Tema d'esame 10 gennaio 2013) Determinare l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} (|z| + \operatorname{Re} z)^2 (\operatorname{Im} z - 3\operatorname{Re} z + 4) \geqslant 0 \\ \left| z - \frac{4}{3} \right| \leqslant 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (|z| + \operatorname{Re} z)^2 (\operatorname{Im} z - 3\operatorname{Re} z + 4) \geq 0 \\ \left| z - \frac{4}{3} \right| \leq 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{\left| z - \frac{4}{3} \right|}_{\text{Distanza del numero complesso } z \text{ generico da } \frac{4}{3}} \leq 1$$

La disequazione rappresenta il cerchio di centro $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ e raggio 1, cf. inclusa.



$$\underbrace{(|z| + \operatorname{Re} z)^2}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{(\operatorname{Im} z - 3\operatorname{Re} z + 4)}_{\in \mathbb{R}} \geq 0$$

$$a^2 \cdot b \geq 0 \iff a = 0 \vee b \geq 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$|z| + \operatorname{Re} z = 0 \vee \operatorname{Im} z - 3\operatorname{Re} z + 4 \geq 0$$

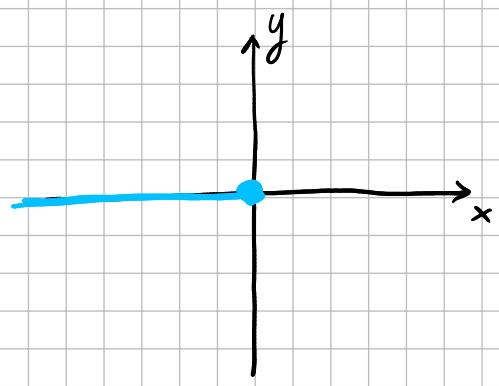
$z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$

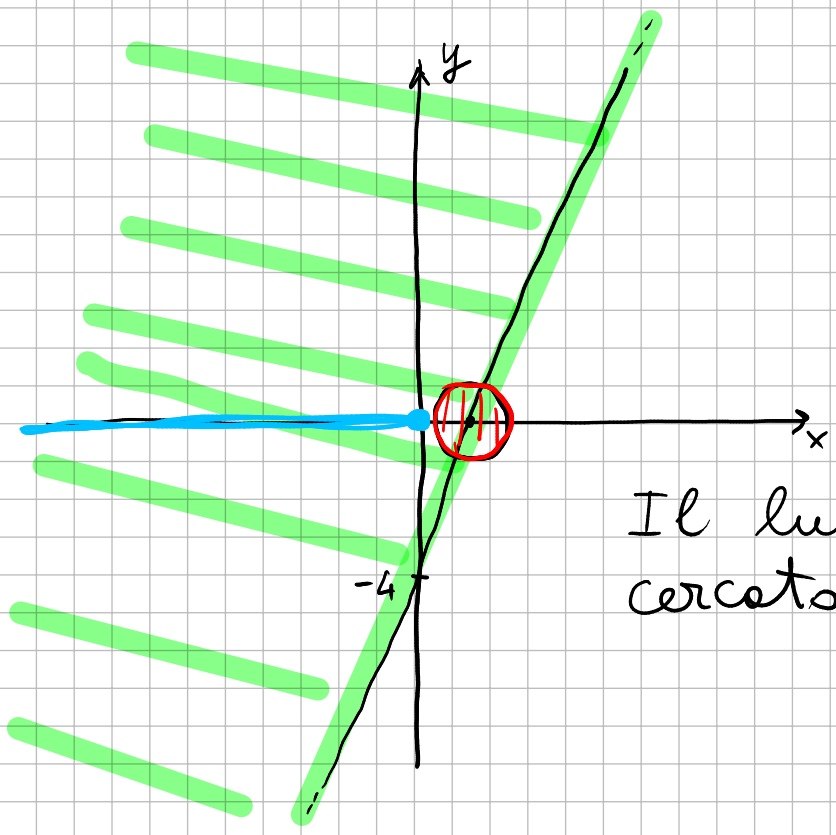
$$\sqrt{x^2 + y^2} + x = 0 \vee y - 3x + 4 \geq 0$$

$y-3x+4 \geq 0 \iff y \geq 3x-4$ rappresenta il semipiano "al di sopra" della retta di equazione $y=3x-4$

$$\sqrt{x^2+y^2}+x=0 \iff \sqrt{x^2+y^2}=-x$$

$$\begin{cases} -x \geq 0 \\ \cancel{x^2}+y^2=\cancel{x^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 0 \\ y=0 \end{cases}$$





Il luogo geometrico cercato è un semicerchio.

(Tema d'esame 10 aprile 2017) Determinare il luogo geometrico A dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\left|e^{z^2}\right| + \operatorname{Im}(z^2 + \overline{z}^2) = \left|e^{7i|z|}\right|.$$

$$\left|e^{z^2}\right| + \operatorname{Im}(z^2 + \overline{z}^2) = \left|e^{7i|z|}\right|$$

$$\left|e^{i\vartheta}\right| = 1 \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}$$

$\left|e^{7i|z|}\right| = 1$ perchè $7|z| \in \mathbb{R}$ per qualunque $z \in \mathbb{C}$

Se $w \in \mathbb{C}$, allora

$$e^{w} = e^{\operatorname{Re} w} \cdot \left(\cos(\operatorname{Im} w) + i \sin(\operatorname{Im} w)\right).$$

Quindi $\left|e^{w}\right| = \left|e^{\operatorname{Re} w}\right| \cdot \left|\cos(\operatorname{Im} w) + i \sin(\operatorname{Im} w)\right| =$

$$= e^{\operatorname{Re} w}$$

$$\left|e^{z^2}\right| + \operatorname{Im}(z^2 + \overline{z}^2) = \left|e^{7i|z|}\right|$$

$$e^{\operatorname{Re}(z^2)} + \operatorname{Im}(z^2 + \overline{z}^2) = 1 \qquad z = x + iy, \text{ con } x, y \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\begin{aligned} z^2 &= (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 \\ \overline{z}^2 &= (x-iy)^2 = x^2 - 2ixy + (-iy)^2 = x^2 - 2ixy - y^2 \end{aligned}}$$

$$e^{\operatorname{Re}\left((x^2-y^2)+2ixy\right)} + \operatorname{Im}(2x^2 - 2y^2) = 1$$

$$e^{x^2-y^2} + 0 = 1$$

$$e^{x^2-y^2} = 1$$

$$x^2-y^2 = 0$$

$$(x+y)\cdot(x-y) = 0$$

$$x+y=0 \lor x-y=0$$

$$y=-x \lor y=x$$

Il luogo geometrico cercato è l'unione delle bisettrici dei quattro quadranti.

(Tema d'esame 1 aprile 2015) Determinare il luogo geometrico A dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$(|\mathrm{Re}(z)| + 3|\mathrm{Im}(z)|)\left(z\bar{z} - (\mathrm{Re}(z))^2 - ie^{\frac{3}{2}\pi i} - \frac{z+\bar{z}}{2}\right) = 0.$$

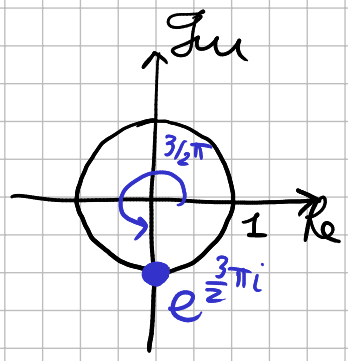
$$\left(|\mathrm{Re}\, z| + 3|\mathrm{Im}\, z|\right)\left(z\bar{z} - (\mathrm{Re}(z))^2 - ie^{\frac{3}{2}\pi i} - \frac{z+\bar{z}}{2}\right) = 0$$

$$|\mathrm{Re}\, z| + 3|\mathrm{Im}\, z| = 0 \ \vee \ z\bar{z} - (\mathrm{Re}(z))^2 - ie^{\frac{3}{2}\pi i} - \frac{z+\bar{z}}{2} = 0$$

$z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{|x|}_{\geq 0} + 3\underbrace{|y|}_{\geq 0} = 0 \iff \begin{cases} |x| = 0 \\ 3|y| = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$z\bar{z} - (\mathrm{Re}(z))^2 - ie^{\frac{3}{2}\pi i} - \frac{z+\bar{z}}{2} = 0$$

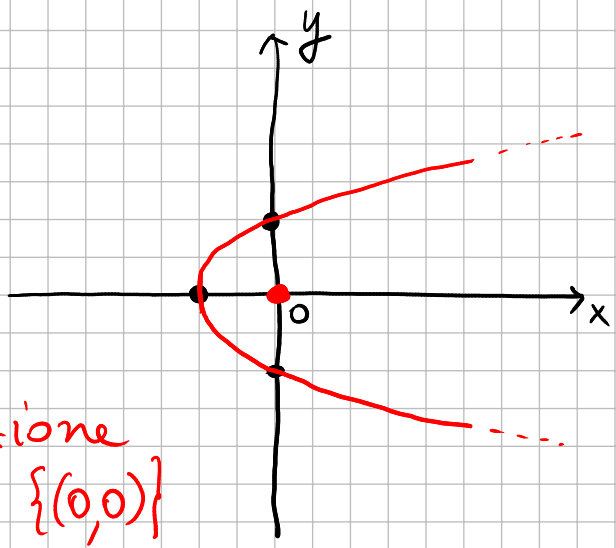


$$\cancel{x^2} + y^2 - \cancel{x^2} - i\cdot(-i) - \frac{x + \cancel{iy} + x - \cancel{iy}}{2} = 0$$

$$y^2 - 1 - x = 0$$

$$x = y^2 - 1$$

Il luogo geometrico cercato è l'unione della parabola di equazione $x = y^2 - 1$ e dell'insieme $\{(0,0)\}$



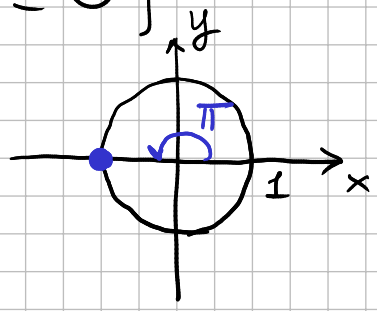
(Tema d'esame 3 settembre 2012) Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ appartenenti all'intersezione $A \cap B$, dove

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z^4 + 2^4 = 0\} \qquad \text{e} \qquad B = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z - \frac{1}{2}|\operatorname{Re} z| < 0\right\}.$$

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z^4 + 2^4 = 0\}$$

$$z^4 = -2^4$$

$$z^4 = 2^4 e^{i\pi}$$



Le soluzioni complesse sono

$$z_k = 2 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_0 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_1 = 2 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} = 2e^{i\frac{3}{4}\pi} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_2 = 2 \cdot e^{i\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = 2 \cdot e^{i\frac{5}{4}\pi} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

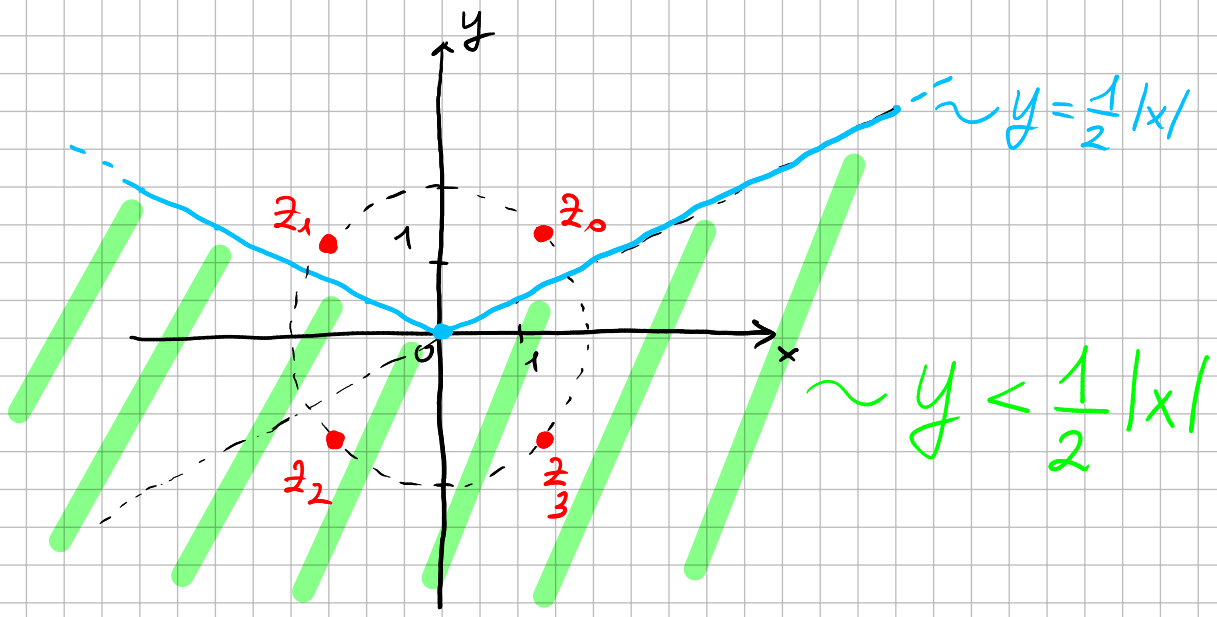
$$z_3 = 2 \cdot e^{i\left(\frac{5}{4}\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = 2 \cdot e^{i\frac{7}{4}\pi} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$B = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z - \frac{1}{2}|\operatorname{Re} z| < 0\right\}$$

$z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$

$$y - \frac{1}{2}|x| < 0$$

Rappresentiamo $y = \frac{1}{2}|x|$



$$A \cap B = \{ z_2, z_3 \}$$

(Tema d'esame 12 luglio 2022) Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ del sistema

(Testo modificato)

$$\begin{cases} z^4 = 7e^{8\pi i}\left[z\overline{z} - |z|^2 + \operatorname{Im}\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}\right)\right] \\ \operatorname{Re}(\operatorname{Im}(2z)) \geqslant \operatorname{Im}(\operatorname{Re}(7z)). \end{cases}$$

$$z^4 = 7\underbrace{e^{8\pi i}}_{=1}\left[z\cdot\overline{z} - |z|^2 + \operatorname{Im}\left(\frac{\cancel{\sqrt{2}}(1+i)}{\cancel{\sqrt{2}}(1-i)}\right)\right]$$

$$z^4 = 7\left[\cancel{|z|^2} - \cancel{|z|^2} + \operatorname{Im}\left(\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\right)\right]$$

$$z^4 = 7\cdot \operatorname{Im}\left(\frac{(1+i)^2}{1^2-i^2}\right)$$

$$z^4 = 7\cdot \operatorname{Im}\left(\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+2i}{2}\right)$$

$$z^4 = 7\cdot \operatorname{Im}(i)$$

$$z^4 = 7$$

$$z^4 = 7\cdot e^{i0}$$

Le soluzioni di questa equazione sono

$$z_k = \sqrt[4]{7}\cdot e^{i\left(\frac{0}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_0 = \sqrt[4]{7}\, e^{i0} = \sqrt[4]{7} \qquad z_2 = \sqrt[4]{7}\cdot e^{i\pi} = -\sqrt[4]{7}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{7}\, e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt[4]{7}\, i \qquad z_3 = \sqrt[4]{7}\cdot e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i\sqrt[4]{7}$$

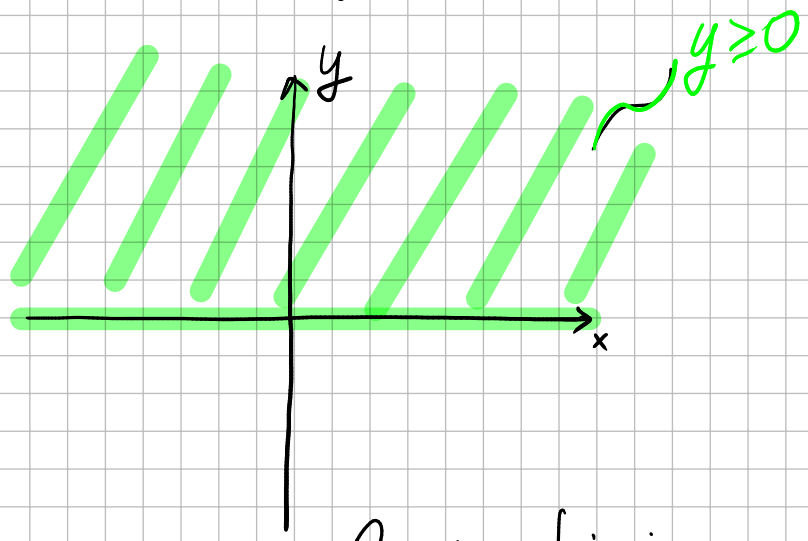
$$\mathrm{Re}(\mathrm{Im}(2z)) \geq \mathrm{Im}(\mathrm{Re}(7z)) \qquad z = x+iy, \text{ con } x,y \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{Re}(\mathrm{Im}(2x+2iy)) \geq \mathrm{Im}(\mathrm{Re}(7x+7iy))$$

$$\mathrm{Re}(2y) \geq \mathrm{Im}(7x)$$

$$2y \geq 0$$

$$y \geq 0$$



Le soluzioni del sistema sono le radici della prima equazione che hanno parte immaginaria non negativa, cioè z_0, z_1, z_2.

(Tema d'esame 3 settembre 2009) Calcolare le radici complesse dell'equazione $z^4 - i|i-1|^2 z = 0$.

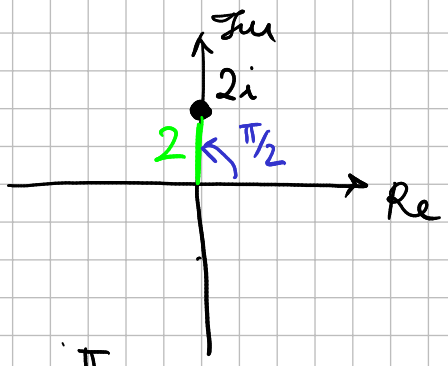
$$z^4 - i|i-1|^2 z = 0$$

$$z\left(z^3 - i|i-1|^2\right) = 0$$

$$z = 0 \quad \vee \quad z^3 = i|i-1|^2$$

$$z = 0 \quad \vee \quad z^3 = i\left((-1)^2 + 1^2\right)$$

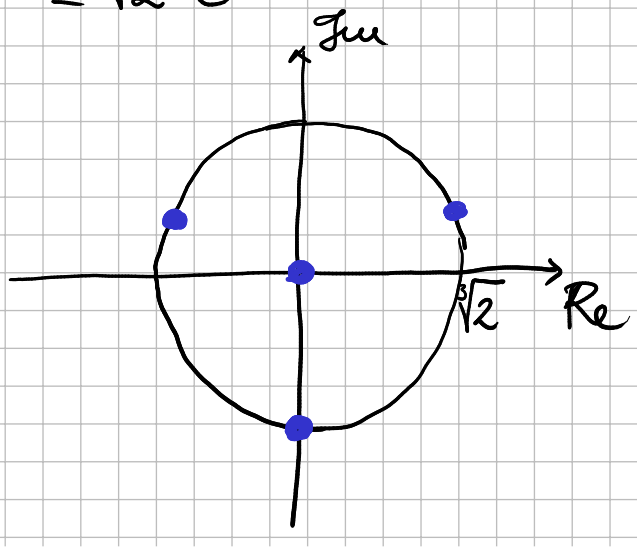
$$z = 0 \quad \vee \quad z^3 = 2i$$



$z^3 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ ha soluzioni complesse

$$z_k = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \qquad k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi\right)} = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{5}{6}\pi}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{3}{2}\pi}$$