Esercitazione del 5 ottobre 2023

1. Scrivere in forma esponenziale i numeri complessi
$$w_1 = -4\sqrt{3}, \qquad w_2 = -\frac{3}{5} - \frac{3}{5}i, \qquad w_3 = 2 - 2\sqrt{3}i, \qquad w_4 = -2e^{i\frac{\pi}{7}}.$$

2. Scrivere in forma algebrica i numeri complessi
$$w_1 = e^{2+i\frac{\pi}{3}}, \qquad w_2 = \frac{2i^5 e^{-i\frac{3}{2}\pi}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}, \qquad w_3 = (2e^{-5i\pi})^3 \left(e^{2-\frac{4i\pi}{3}}\right)^2.$$

3. Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $(z^2+8)(z^5-5)(z^3+27i) = 0$.

4. Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 + 4 = 3z$.

5. Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 + iz + \frac{\sqrt{3}}{4}i = 0$.

6. Determinare e rappresentare graficamente (identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$) il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che
$$\frac{3z-4i}{1-iz} \in \mathbb{R}.$$

7. (Tema d'esame 1 settembre 2017) Sia A il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che
$$\begin{cases} |z-i| \leqslant 3 \\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{iz+7\overline{z}+1}{|z|^2+2}\right) \geqslant 0. \end{cases}$$
Calcolare l'area di A.

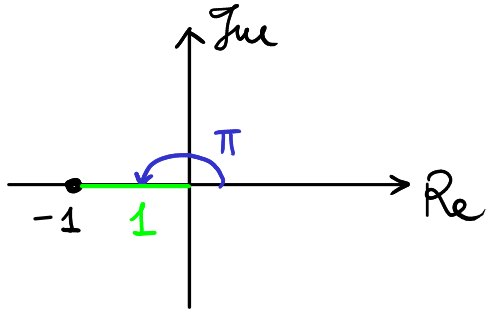
8. (Tema d'esame 30 gennaio 2017) Scrivere in forma cartesiana le radici cubiche complesse del numero $w = (1-i)^6|e^{3+i}|$.

Scrivere in forma esponenziale i numeri complessi

$$w_1 = -4\sqrt{3}, \qquad w_2 = -\frac{3}{5} - \frac{3}{5}i, \qquad w_3 = 2 - 2\sqrt{3}i, \qquad w_4 = -2e^{i\frac{\pi}{7}}.$$

$z \in \mathbb{C}$ è scritto nella forma esponenziale quando è nella forma $z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$, dove $\rho = |z|$ e $\vartheta \in \mathbb{R}$ è un argomento

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}$$



$w_1 = -4\sqrt{3}$

$|w_1| = 4\sqrt{3}$

$-1 = e^{i\pi}$

$w_1 = 4\sqrt{3} \cdot e^{i\pi}$

$$w_2 = -\frac{3}{5} - \frac{3}{5}i = \frac{3}{5}(-1-i)$$

$$|-1-i| = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} -1 = \sqrt{2} \cdot \cos\vartheta \\ -1 = \sqrt{2} \cdot \sin\vartheta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\vartheta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\vartheta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \vartheta = \frac{5}{4}\pi$$

va bene

$$-1-i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{5}{4}\pi}$$

$$w_2 = \frac{3}{5}(-1-i) = \frac{3}{5}\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{5}{4}\pi}$$

$$w_3 = 2 - 2\sqrt{3}i = 2(1-\sqrt{3}i)$$

$$|1-\sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\begin{cases} 1 = 2\cos\vartheta \\ -\sqrt{3} = 2\sin\vartheta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\vartheta = \frac{1}{2} \\ \sin\vartheta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad \vartheta = -\frac{\pi}{3}$$

va bene

$$1-\sqrt{3}i = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$w_3 = 2(1-\sqrt{3}i) = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$w_4 = -2e^{i\frac{\pi}{7}} = 2\cdot e^{i\frac{\pi}{7}}\cdot(-1) = 2e^{i\frac{\pi}{7}}\cdot e^{i\pi} =$$

$$= 2e^{i\left(\frac{\pi}{7}+\pi\right)} = 2\cdot e^{i\frac{8}{7}\pi}$$

Per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \qquad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$$

Per ogni $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$

$$\left(e^{z}\right)^{n} = e^{nz}$$

Scrivere in forma algebrica i numeri complessi

$$w_1 = e^{2+i\frac{\pi}{3}}, \qquad w_2 = \frac{2i^5 e^{-i\frac{3}{2}\pi}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}, \qquad w_3 = (2e^{-5i\pi})^3 \left(e^{2-\frac{4i\pi}{3}}\right)^2.$$

$$W_1 = e^{2+i\frac{\pi}{3}}$$

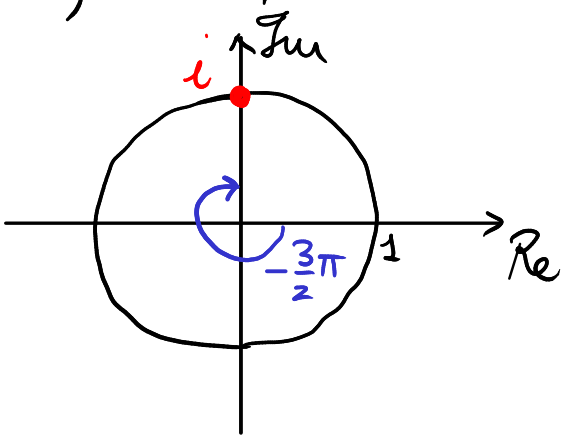
$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \quad e^{z} = e^{\operatorname{Re} z}\left(\cos(\operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Im} z)\right)}$$

$$W_1 = e^2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right) = e^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \underbrace{\boxed{\frac{e^2}{2}}}_{\operatorname{Re}(w_1)} + \underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{3}e^2}{2}}}_{\operatorname{Im}(w_1)} i$$

$$W_2 = \frac{2i^5 e^{-i\frac{3}{2}\pi}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$i^0 = 1, \; i^1 = i, \; i^2 = -1, \; i^3 = -i, \; i^4 = 1, \ldots$$

$$W_2 = \frac{2i\, e^{-i\frac{3}{2}\pi}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} =$$



$$= 2i \cdot i \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} =$$

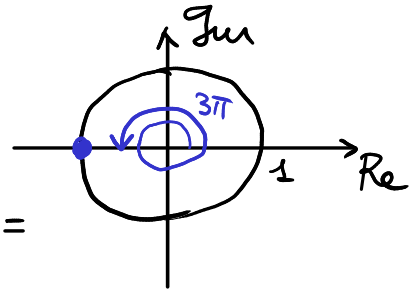
$$= -2e^{-i\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2} i$$

$$W_3 = \left(2e^{-5i\pi}\right)^3 \left(e^{2-\frac{4}{3}i\pi}\right)^2 =$$

$$= \left(2e^{i\pi}\right)^3 \left(e^2 \cdot e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right)^2 =$$

$$= 8e^{i3\pi} \cdot e^{4} \cdot e^{-\frac{8}{3}i\pi} =$$



$$= 8e^{4} \cdot (-1) \cdot \left(\cos\left(-\frac{8}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{8}{3}\pi\right)\right) =$$

$$= -8e^{4}\left(\cos\frac{8}{3}\pi - i\sin\frac{8}{3}\pi\right) =$$

$$= -8e^{4}\left(\cos\frac{2}{3}\pi - i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = -8e^{4}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$$

$$= \underbrace{\boxed{4e^{4}}}_{\mathrm{Re}(w_3)} + \underbrace{\boxed{4\sqrt{3}e^{4}}}_{\mathrm{Im}(w_3)}\, i$$

Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $(z^2+8)(z^5-5)(z^3+27i)=0$.

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $(z^2+8)(z^5-5)(z^3+27i)=0$

Per la legge di annullamento del prodotto, l'equazione è equivalente a

$$z^2+8=0 \quad \vee \quad z^5-5=0 \quad \vee \quad z^3+27i=0$$

$$z^2+8=0 \iff z^2=-8$$

Radici quadrate complesse di -8

$$z^2=8e^{i\pi}$$

Le soluzioni complesse di $z^2=8e^{i\boxed{\pi}}$ sono

$$z_0=2\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi+2\cdot 0\cdot\pi}{2}}=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}\,i$$

$$z_1=2\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{2}}=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3}{2}\pi}=-2\sqrt{2}\,i$$

Osservazione. Se $a\in\mathbb{R}$ e $a<0$, le sue radici quadrate complesse sono $i\sqrt{|a|}$ e $-i\cdot\sqrt{|a|}$.

$$z^5-5=0 \iff z^5=5 \iff z^5=5\cdot e^{i0}$$

Le soluzioni complesse di $z^5=5\cdot e^{i\boxed{0}}$ sono

$$z_0'=\sqrt[5]{5}\cdot e^{i\frac{0+2\cdot 0\cdot\pi}{5}}=\sqrt[5]{5}$$

$$z_1'=\sqrt[5]{5}\,e^{i\frac{2}{5}\pi}$$

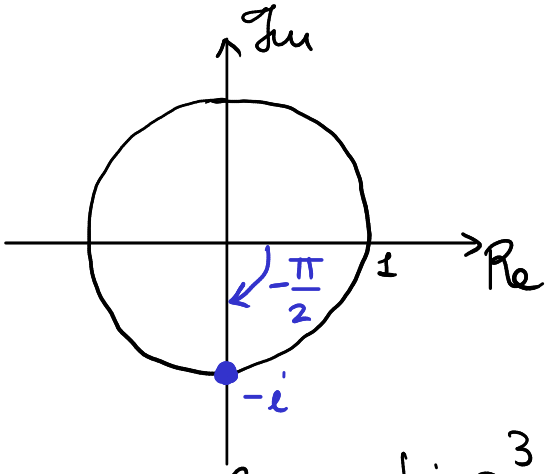
$$z_2'=\sqrt[5]{5}\cdot e^{i\frac{4}{5}\pi}$$

$$z_3'=\sqrt[5]{5}\cdot e^{i\frac{6}{5}\pi}$$

$$z_4'=\sqrt[5]{5}\cdot e^{i\frac{8}{5}\pi}$$

$$z^3+27i=0 \iff z^3=-27i \iff z^3=27\cdot(-i)$$

$$z^3=27\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$$



Le soluzioni complesse di $z^3=27\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$ sono

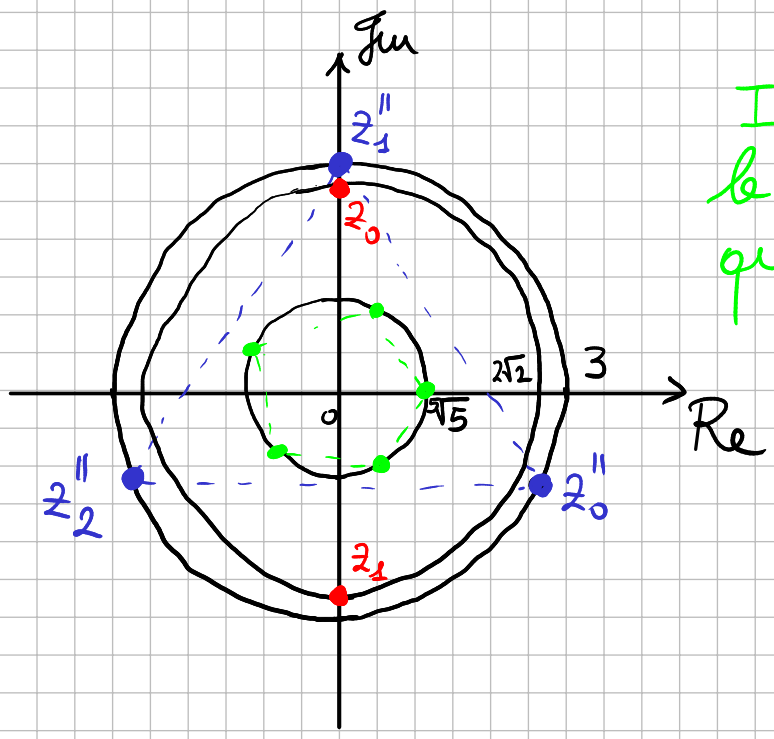
$$z_0''=\sqrt[3]{27}\cdot e^{i\frac{-\frac{\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi}{3}}=3e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_1''=\sqrt[3]{27}\cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi\right)}=3e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_2''=\sqrt[3]{27}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi\right)}=3e^{i\frac{7}{6}\pi}$$

L'equazione di partenza ha soluzioni

$z_0, z_1, z_0', z_1', z_2', z_3', z_4', z_0'', z_1'', z_3''$.



In verde le radici quinte complesse di 5

Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 + 4 = 3z$.

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^2 - 3z + 4 = 0$$

$az^2 + bz + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0)$

ha soluzioni z_0 e z_1 date da

$$z_0 = \frac{-b + w_0}{2a} \quad e \quad z_1 = \frac{-b + w_1}{2a},$$

dove w_0 e w_1 sono le radici quadrate complesse di $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 - 16 = -7$$

Le radici quadrate complesse di Δ sono

$$w_0 = i\sqrt{7} \quad e \quad w_1 = -i\sqrt{7}.$$

L'equazione ha soluzioni complesse

$$z_0 = \frac{3 + i\sqrt{7}}{2} \quad e \quad z_1 = \frac{+3 - i\sqrt{7}}{2}$$

$$z_0 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \qquad z_1 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 + iz + \frac{\sqrt{3}}{4}i = 0$.

$$\Delta = i^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} i = -1 - \sqrt{3} i$$

Calcoliamo le radici quadrate complesse di $-1-\sqrt{3}i$

$$|-1-\sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\begin{cases} -1 = 2\cos\vartheta \\ -\sqrt{3} = 2\sin\vartheta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\vartheta = -\frac{1}{2} \\ \sin\vartheta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad \vartheta = \frac{4}{3}\pi$$

va bene

Le radici quadrate complesse di $\Delta = 2 \cdot e^{i\frac{4}{3}\pi}$ sono

$$w_0 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\frac{4}{3}\pi + 2\cdot 0\cdot\pi}{2}} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

$$w_1 = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{2}{3}\pi + \pi\right)} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{5}{3}\pi}$$

L'equazione $z^2 + iz + \frac{\sqrt{3}}{4}i = 0$ ha soluzioni complesse

$$z_0 = \frac{-i + \sqrt{2}e^{i\frac{2}{3}\pi}}{2} = \frac{-i}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$$

$$= -\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}i = -\frac{\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-2}{4}$$

$$z_1 = \frac{-i + \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{5}{3}\pi}}{2} = -\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(+\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$$

$$= -\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}i = \frac{\sqrt{2}}{4} - i\,\frac{\sqrt{6}+2}{4}$$

Determinare e rappresentare graficamente (identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$) il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{3z-4i}{1-iz} \in \mathbb{R}.$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{3z-4i}{1-iz}\right)=0$$

$$z = x+iy, \text{ con } x,y \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{3x+3iy-4i}{1-ix+y}\right)=0$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{3x+i(3y-4)}{(1+y)-ix}\cdot\frac{(1+y)+ix}{(1+y)+ix}\right)=0$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{3x(1+y)-x(3y-4)+i\left[3x\cdot x+(3y-4)(1+y)\right]}{(1+y)^2+x^2}\right)=0$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{3x(1+y)-x(3y-4)}{(1+y)^2+x^2}+i\,\frac{3x^2+3y+3y^2-4-4y}{(1+y)^2+x^2}\right)=0$$

parte reale

parte immaginaria

$$\frac{3x^2+3y^2-y-4}{(1+y)^2+x^2}=0$$

$$3x^2+3y^2-y-4=0$$

$$x^2+y^2-\frac{1}{3}y-\frac{4}{3}=0$$

C.E.

$$1-iz\neq 0$$

$$z\neq\frac{1}{i}$$

$$z\neq\frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}$$

$$z\neq -i$$

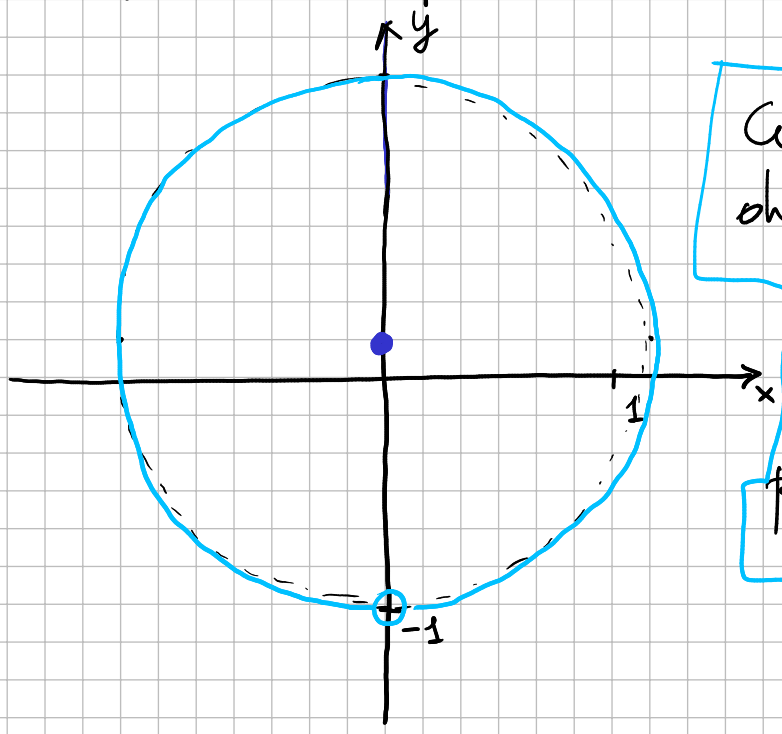
$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

Centro $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$

Raggio $r=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}$

$C\left(0, \frac{1}{6}\right)$ centro della circonferenza

$$r = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{48}{36}} = \frac{7}{6}$$



Circonferenza di centro $\left(0, \frac{1}{6}\right)$ e raggio $\frac{7}{6}$, privata del punto $(0, -1)$

(Tema d'esame 1 settembre 2017) Sia A il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} |z - i| \leqslant 3 \\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{iz + 7\bar{z} + 1}{|z|^2 + 2}\right) \geqslant 0. \end{cases}$$

Calcolare l'area di A.

La disequazione

$\underbrace{|z - i|}_{\text{Distanza del generico numero complesso } z \text{ da } i} \leq 3$ è soddisfatta da tutti gli $z \in \mathbb{C}$ che distano da i al più 3

La disequazione $|z-i| \leq 3$ rappresenta il cerchio di centro i e raggio 3, inclusa la circonferenza che lo delimita.

$$\mathrm{Re}\left(\frac{iz + 7\bar{z} + 1}{|z|^2 + 2}\right) \geq 0$$

$|z|^2 + 2$ è un numero reale positivo $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Se } z \in \mathbb{C} \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ allora} \\ \mathrm{Re}(\alpha \cdot z) = \alpha \cdot \mathrm{Re}(z) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(\alpha \cdot z) = \alpha \cdot \mathrm{Im}(z) \end{array}}$$

$$\mathrm{Re}\left(\underbrace{\frac{1}{|z|^2 + 2}}_{\in \mathbb{R}} \cdot (iz + 7\bar{z} + 1)\right) \geq 0$$

$$\frac{\mathrm{Re}(iz + 7\bar{z} + 1)}{\underbrace{|z|^2 + 2}_{\text{sempre positivo}}} \geq 0$$

$$\mathrm{Re}\left(iz+7\bar{z}+1\right)\geq 0$$

$$z=x+iy, \text{ con } x,y\in\mathbb{R}$$

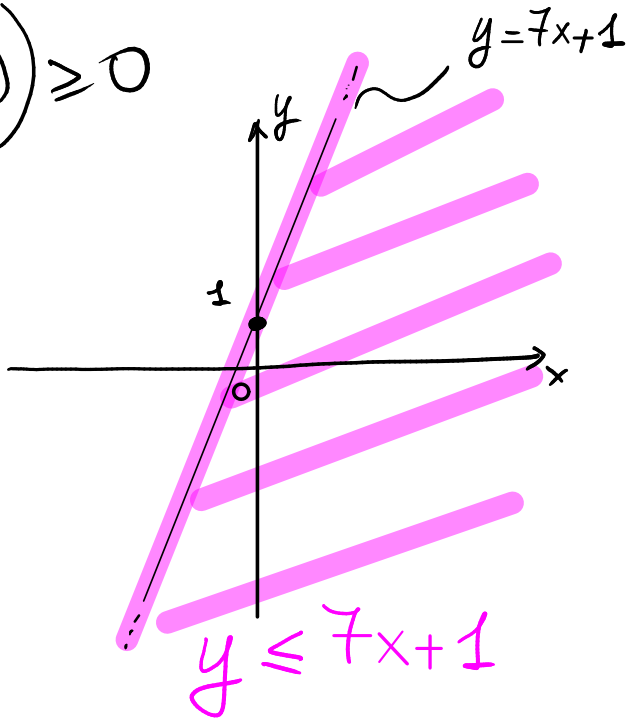
$$\mathrm{Re}\left(ix-y+7x-7iy+1\right)\geq 0$$

$$\mathrm{Re}\left(\left(-y+7x+1\right)+i\left(x-7y\right)\right)\geq 0$$

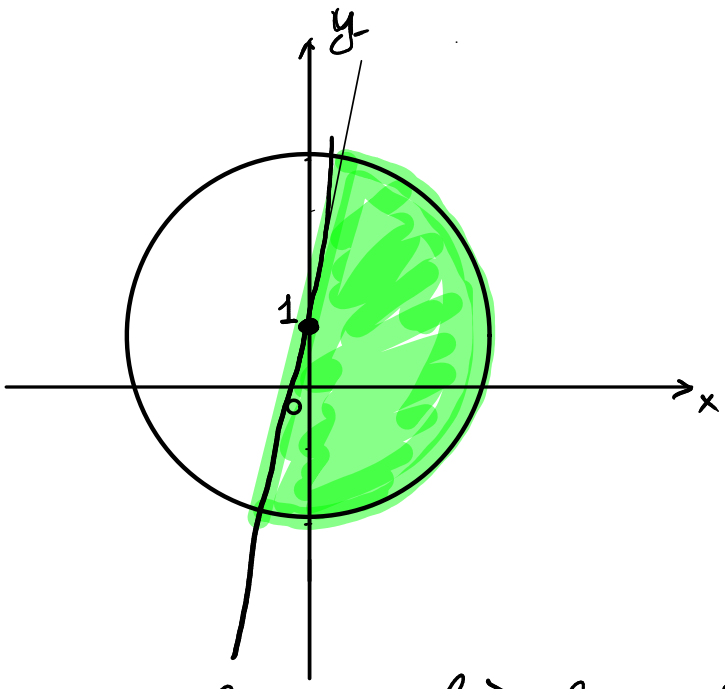
$$-y+7x+1\geq 0$$

$$y\leq 7x+1$$

È il semipiano "al di sotto" della retta di equazione $y=7x+1$.



Il luogo geometrico cercato è l'intersezione fra questo semipiano e il cerchio indicato sopra.



A è un semicerchio perchè la retta di equazione

$y = 7x + 1$ passa per $(0,1)$, che è centro del cerchio.

L'area di A è $\frac{\pi \cdot 3^2}{2} = \frac{9}{2}\pi$.

(Tema d'esame 30 gennaio 2017) Scrivere in forma cartesiana le radici cubiche complesse del numero $w = (1-i)^6|e^{3+i}|$.

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^3 = (1-i)^6 \left|e^{3+i}\right|$$

$$\left|e^{3+i}\right| = \left|e^3 \cdot e^i\right| = e^3 \cdot \left|e^i\right| =$$

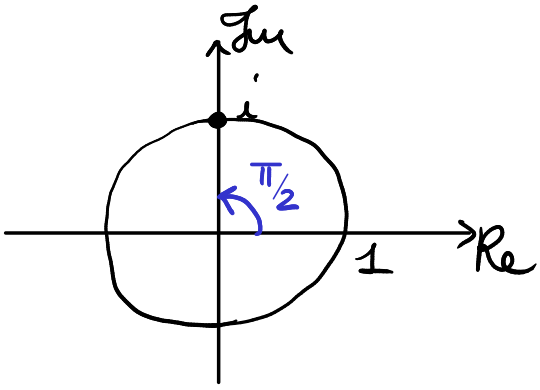
$$= e^3 \left|\cos 1 + i \sin 1\right| = e^3 \sqrt{\cos^2 1 + \sin^2 1} = e^3$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \left|e^{i\vartheta}\right| = 1 \text{ per ogni } \vartheta \in \mathbb{R} \\ \left|e^z\right| = \left|e^{\operatorname{Re} z} \cdot e^{i \operatorname{Im} z}\right| = \left|e^{\operatorname{Re} z}\right| \quad \forall z \in \mathbb{C} \end{array}}$$

$$w = (1-i)^6 e^3 =$$

$$= e^3 \left((1-i)^2\right)^3 = e^3 (-2i)^3 = -8e^3 \cdot (-i) = 8e^3 \cdot i$$

$$w = 8e^3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$



Esercizio: risolvere in $\mathbb{C}$

$$z^3 = 8e^3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$