29/11/2023

- $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{5}{4}}$ caratterizzare la serie [3/09/20]

$a_n = \sqrt[n]{\frac{5}{4}} \geq 0 \quad \forall n \geq 1$ è serie a t.p. non può essere indet.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5}{4}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^{1/n \to 0} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ per la cond nec delle serie conv, la serie data non può conv.

$\Rightarrow$ la serie è divergente.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^4+1}+n}$ caratterizzare la serie

$a_n = \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^4+1}+n} \geq 0 \quad \forall n \geq 1$ serie a t.p non può essere indet

applico il criterio del conf as.

se $\exists\, b_n$ e $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $a_n \sim l\, b_n$ quando $n \to \infty$

allora $\sum a_n \sim \sum b_n$

N: $\sin^2 n$ questo non è confrontabile con altre succ

D: $\sqrt{n^4+1}+n \sim \sqrt{n^4}+n = n^2+n \sim n^2$

$\rightarrow \sum a_n \sim \sum \frac{\sin^2 n}{n^2}$ $\qquad \sin x \sim x$ se $x \to 0$

poiché $0 \leq \sin^2 n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{\sin^2 n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

per il criterio del confronto ho

$$\rightarrow \quad 0 \le \sum \frac{\sin^2 n}{n^2} \le \sum \frac{1}{n^2}$$

$$0 \le \sum a_n \sim \sum \frac{\sin^2 n}{n^2} \le \underbrace{\sum \frac{1}{n^2}}_{\text{serie armonica gen con } \lambda = 2 > 1 \text{ converg.}}$$

$$\text{CONV} \overset{2}{\Longleftarrow} \text{CONV} \overset{1}{\Longleftarrow} \text{CONV}$$

criterio conf. as. — criterio del conf.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+3}{n^{7/2}+\log n}$ caratterizzare la serie

$a_n = \dfrac{n^2+n+3}{n^{7/2}+\log n} \geq 0$ serie a t.p. non può essere ind.

applico criterio del confronto asint.

cerco b_n e $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $a_n \sim \ell\, b_n$ per $n \to \infty$

N: $n^2+n+3 \sim n^2$ per $n \to \infty$

D: $n^{7/2}+\log n \sim n^{7/2}$ $\quad (\log n)^{\alpha} \mid n^{\beta} \mid q^n \mid n! \mid n^n$

$\alpha > 0$ $\quad \beta > 0$

$$a_n \sim \frac{n^2}{n^{7/2}} = \frac{1}{n^{7/2-2}} = \frac{1}{n^{3/2}} = b_n \qquad (\ell = 1)$$

per il criterio del conf as. ho

$$\sum a_n \sim \underbrace{\sum \frac{1}{n^{3/2}}}_{\text{serie armonica generale con } \lambda = \frac{3}{2} > 1 \text{, è conv}}$$

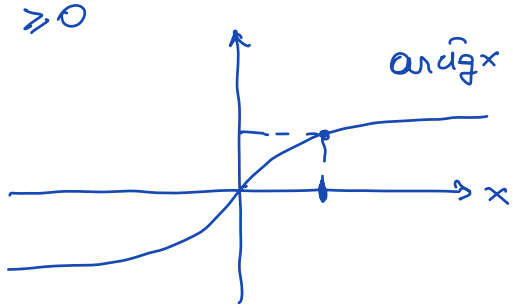
$$\text{CONV} \Longleftarrow \text{CONV}$$

crit. conf. as

la serie data è conv.

- $\sum_{n\geq 1} (n^4 - n^2 + \log n) \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{n^5}\right)$ convert.

$$a_n = \underbrace{(n^4 - n^2 + \log n)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{n^5}\right)}_{\geq 0} \geq 0$$



serie a t.p. non può essere indet.

$F_1 = (n^4 - n^2 + \log n) \sim n^4$ per $n \to \infty$

$F_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{n^5}\right) \sim \frac{2}{n^5}$ $\qquad$ $\operatorname{arctg} x \sim x$ se $x \to 0$

$x = \frac{2}{n^5} \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$

$a_n = F_1 \cdot F_2 \sim n^4 \cdot \frac{2}{n^5} = \frac{2}{n} = \ell b_n$ del criterio del conf as.

$\ell = 2$ $\quad b_n = \frac{1}{n}$

$\sum a_n \sim 2 \sum b_n \sim \sum b_n$

$\sum a_n \sim \underbrace{\sum \frac{1}{n}}$ serie armonica diverg

DIV $\Longleftarrow$ DIV

crit. conf. as.

la serie data diverge

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-\sqrt{1-\frac{2}{n}}}{n^{1/3}}$

$$a_n = \frac{1-\sqrt{1-2/n}}{n^{1/3}}$$

poiché $n \geq 2$, ho $1-\frac{2}{n} \geq 0$

e $1-\frac{2}{n} < 1$

$\Rightarrow \sqrt{1-\frac{2}{n}} < \sqrt{1} = 1$

$\Rightarrow N = 1-\sqrt{1-\frac{2}{n}} > 0$

$D = n^{1/3} > 0$ $\Rightarrow a_n > 0$ ho serie a t.p. non indet.

$N = 1-\sqrt{1-\frac{2}{n}} \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$

non aiuta

devo riscrivere N approssimandolo con una espressione più semplice

$$N = \left(1-\sqrt{1-\frac{2}{n}}\right) = \left(1-\sqrt{1-\frac{2}{n}}\right) \cdot \frac{\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)}{\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)} =$$

$$= \frac{1-\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1+\sqrt{1-\frac{2}{n}}} = \frac{\frac{2}{n}}{1+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}$$

$$a_n = \frac{2/n}{1+\sqrt{1-\frac{2}{n}}} \cdot \frac{1}{n^{1/3}} = \frac{2}{n^{4/3}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)}}_{\sim 2} \sim \frac{\cancel{2}^{\,1}}{n^{4/3} \cdot \cancel{2}_{\,1}}$$

per $n \to \infty$

$$a_n \sim \frac{1}{n^{4/3}} \quad \text{per } n \to \infty$$

$$\sum a_n \sim \underbrace{\sum \frac{1}{n^{4/3}}}_{\text{CONV}} \qquad b_n = \frac{1}{n^{4/3}}$$

serie armonica gen. con $\lambda = \frac{4}{3} > 1$

CONV $\Leftarrow$ CONV

per il conf as.

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)}{\sqrt[3]{n} + \operatorname{arctg}(n!)}} \quad a_n$$

$a_n \geq ?$

$\cos x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$1 - \cos x \geq 0$

$$N = 1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) \geq 0$$

$$D = \sqrt[3]{n} + \operatorname{arctg}(n!) > 0 \quad (n \geq 1)$$

$$\Rightarrow a_n \geq 0$$

$$N = 1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)^2 = \quad \text{per } n \to \infty$$

con $x = \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \xrightarrow[\text{per } n \to \infty]{} 0$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

cioè

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2 \quad \text{per } x \to 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad \text{Taylor}$$

$$\frac{x^2}{2} + o(x^3) = 1 - \cos x$$

$$D = \sqrt[3]{n} + \operatorname{arctg}(n!) \sim \sqrt[3]{n}$$

per $n \to \infty \Rightarrow n! \to \infty$

$\Rightarrow \operatorname{arctg}(n!) \to \frac{\pi}{2}$

$$a_n \sim \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{2}\frac{1}{n^{1/2}\cdot n^{1/3}} = \frac{1}{2\, n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2\, n^{5/6}}$$

$$a_n \sim \frac{1}{2n^{5/6}} \quad \text{per } n \to \infty$$

$$\sum a_n \sim \sum \frac{1}{2n^{5/6}} \underset{\text{linearità}}{=} \frac{1}{2} \underbrace{\sum \frac{1}{n^{5/6}}}_{\substack{\text{serie armonica} \\ \text{gener.} \\ \text{con } \lambda = \frac{5}{6} < 1}}$$

$$\text{DIV} \xLeftarrow[\text{criterio del conf as.}]{} \text{DIV}$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7n)^n}{(2n)!}$

$$a_n = \frac{(7n)^n}{(2n)!} > 0$$

applico il criterio del rapporto

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

se $\ell < 1 \Rightarrow \sum a_n$ conv

se $\ell > 1 \Rightarrow \sum a_n$ div

se $\ell = 1 \Rightarrow$ non posso concludere

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(7(n+1))^{n+1}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(7n)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(7n+7)^n (7n+7)}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(7n)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(7n+7)^n (7n+7)\, \cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}\,(7n)^n} =$$

$$\frac{7}{2}$$

$$(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$$

$$= \frac{7}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(7n+7)^n}{(2n+2)(7n)^n} = \qquad \to e$$

NON dire $(7n+7)^n \sim (7n)^n$

$$\frac{(7n+7)^n}{(7n)^n} = \left(\frac{7n+7}{7n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(7n+7)^n}{(7n)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$= \frac{7}{2} \cdot e \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+2}}_{=0} = 0 = \ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$\ell = 0 < 1 \Rightarrow \sum a_n$ conv per il criterio del rapp.

Svolgimento errato:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(7n+7)^n}{(7n)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(7n)^n}{(7n)^n} = 1$$ che è sbagliato

se ammetto che $(7n+7)^n \sim (7n)^n$ ho

errore

$(7n+7)^n \sim e \cdot (7n)^n$ è corretto

Più in generale $(n+1)^n$ non si comporta come n^n

ma $(n+1)^n \sim e\, n^n$

dal limite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Determinare per quali valori $a \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4+a}{1-a}\right)^n \text{ converge.}$$

esempio di serie geom con $q = \frac{4+a}{1-a}$

ricordo che $\sum q^n$ converge sse $|q| < 1$

Se $\left|\frac{4+a}{1-a}\right| < 1 \Rightarrow$ la serie data conv.

$$\left|\frac{4+a}{1-a}\right| < 1 \iff -1 < \frac{4+a}{1-a} < 1 \iff \begin{cases} -1 < \frac{4+a}{1-a} \\ \frac{4+a}{1-a} < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4+a}{1-a} + 1 > 0 \\ \frac{4+a}{1-a} - 1 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{4+\cancel{a}+1-\cancel{a}}{1-a} > 0 \\ \frac{4+a-1+a}{1-a} < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{5}{1-a} > 0 & D_1 \\ \frac{2a+3}{1-a} < 0 & D_2 \end{cases}$$

D_1 $\quad \frac{5}{1-a} > 0 \iff 1-a > 0 \iff a < 1$

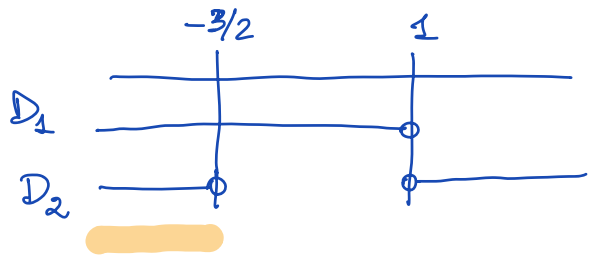
D_2 $\quad \frac{2a+3}{1-a} < 0 \qquad 2a+3 > 0 \Rightarrow a > -\frac{3}{2}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 1-a > 0 \Rightarrow a < 1$

		$-3/2$		1	
$2a+3$	$-$		$+$		$+$
$1-a$	$+$		$+$		$-$
$\frac{2a+3}{1-a}$	$-$		$+$		$-$

D_2 : $\quad a < -\frac{3}{2}$ o $a > 1$

$$\begin{cases} a < 1 \\ a < -\frac{3}{2} \text{ o } a > 1 \end{cases}$$



$$a < -\frac{3}{2}$$

Quando $a < -\frac{3}{2} \Rightarrow \overbrace{q = \frac{4+a}{1-a} \in (-1, 1)}^{|q|<1}$

e la serie data converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(7-\alpha)^n}{\log(1+7^n)}}_{a_n}$$

Studiare la conv al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

serie con a_n di segno qualsiasi, allora studio la conv. assoluta

$$|a_n| = \left| \frac{(7-\alpha)^n}{\log(1+7^n)} \right| \overset{(*)}{=}$$

se $n \geq 1 \Rightarrow 1+7^n \geq 8 \Rightarrow \log(1+7^n) > 0$

$$|(7-\alpha)^n| = |7-\alpha|^n$$

$$(*) = \frac{|7-\alpha|^n}{\log(1+7^n)} = |a_n|$$

criterio del rapporto sulla serie $\sum_1 |a_n|$

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{|7-\alpha|^{n+1}}\ |7-\alpha|}{\log(1+7^{n+1})} \cdot \frac{\log(1+7^n)}{\cancel{|7-\alpha|^n}} =$$

$$= |7-\alpha| \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+7^n)}{\log(1+7^{n+1})} = |7-\alpha| \lim_{n\to\infty} \frac{\log(7^n)}{\log(7^{n+1})} =$$

$$= |7-\alpha| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n \cancel{\log 7}}{(n+1)\cancel{\log 7}} = |7-\alpha| \cdot 1 = |7-\alpha|$$

1. se $\ell = |7-\alpha| < 1 \Rightarrow$ la serie $\sum_1 |a_n|$ conv
2. se $\ell = |7-\alpha| > 1 \Rightarrow$ la serie $\sum_1 |a_n|$ div
3. se $\ell = |7-\alpha| = 1 \Rightarrow$ non posso concludere

(1) $|7-\alpha| < 1 \iff -1 < 7-\alpha < 1 \iff -8 < -\alpha < -6$

$\quad -7 \quad -7 \quad -7 \qquad \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-1)$

$6 < \alpha < 8$

Se $6<\alpha<8$, la serie $\sum_1 |a_n|$ conv
cioè la serie data conv assolutamente.

(2) $\ell = |7-\alpha| > 1 \iff 7-\alpha < -1$ o $7-\alpha > 1$

$\boxed{\alpha > 8}$ o $\boxed{\alpha < 6}$

la serie $\sum_1 |a_n|$ è divergente

$\left(\sum (-1)^k \frac{1}{k} \right.$ converge, ma non converge assolut. $\left. \sum a_n \text{ conv}, \ \sum |a_n| \text{ div} \right)$

2_a $\quad \alpha > 8 \quad$ riconsidero $\sum a_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7-\alpha)^n}{\log(1+7^n)}$$

se $\alpha > 8 \Rightarrow (7-\alpha) < 0$

$$(7-\alpha) = -\underbrace{(\alpha-7)}_{>0}$$

$$(7-\alpha)^n = (-1)^n (\alpha-7)^n$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\alpha-7)^n}{\log(1+7^n)}}_{\text{è una serie a segni alterni}} \quad a_n$$

$$b_n = \frac{(\alpha-7)^n}{\log(1+7^n)} > 0$$

perché $\alpha > 8$

$$a_n = (-1)^n b_n$$

vedo se Leibniz è utile

$\left(\text{se } b_n \text{ è decresc e } \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow \sum (-1)^n b_n \text{ è conv} \right)$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha-7)^n}{\underbrace{\log(1+7^n)}_{\sim n \cdot \log 7}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha-7)^n}{n \cdot \log 7} = \infty$$

perché il numeratore ha ordine di ∞ maggiore rispetto al den.

Leibniz non può essere applicato, ma ho trovato $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n b_n \quad \nexists \qquad (a_n$$

$\Rightarrow$ la serie $\sum a_n$ non è convergente per la cond necessaria delle serie conv.

(2b) con $\alpha < 6$ si risolve analogamente al caso 2a

(3) $|7-\alpha| = 1$ $\begin{cases} 7-\alpha = 1 \iff \alpha = 6 \leftarrow \\ \text{o} \\ 7-\alpha = -1 \iff \alpha = 8 \leftarrow \end{cases}$

(3a) sostituisco $\alpha = 6$ nell'espressione iniziale di a_n

$$a_n = \frac{(7-\overset{6}{\alpha})^n}{\log(1+7^n)} = \frac{1}{\log(1+7^n)}$$

$$\sum \frac{1}{\log(1+7^n)}$$ da studiare (serie a t. p.)

(3b) sostituisco $\alpha = 8$ nell'espr di a_n

$$a_n = \frac{(7-\alpha)^n}{\log(1+7^n)} = \frac{(-1)^n}{\log(1+7^n)}$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{\log(1+7^n)}$$ da studiare (serie a segni alterni)