Esercizi su serie 28/11/23

ES 1) $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\log\left(2+\frac{1}{k}\right)}$? conv/div / indet.

E' a t.p.? sì: $a_k \geq 0$? $\forall k \geq 1$

se $k \geq 1 \Rightarrow 2+\frac{1}{k} \geq 2$

perché log è una f monot. cresc

$\log\left(2+\frac{1}{k}\right) \geq \log 2 > 0$

$\Rightarrow$ per il thm delle serie a.t.p. la serie data non può essere indet.

Ci ricordiamo che, per la cond nec delle serie conv.

se $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0 \Rightarrow \sum a_k$ non converge

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \log\left(2+\underbrace{\frac{1}{k}}_{\to 0}\right) = \log 2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ la serie data non conv.

Segue che la serie data è divergente.

ES2 $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\log\left(1+\frac{2}{k}\right)}_{a_k}$? conv/div/indet

1) è una serie a t.p. $1+\frac{2}{k} \geq 1 \quad \forall k \geq 1$

$\log\left(1+\frac{2}{k}\right) \geq \log 1 = 0$

$\Rightarrow$ la serie data non può essere indeterminata.

2) $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \log\left(1+\frac{2}{k}\right) = 0$, non concludo nulla

3) vedo se posso applicare il criterio del confronto

$a_k = \log\left(1+\frac{2}{k}\right)$ $\quad b_k = \log\left(1+\frac{1}{k}\right)$ so che $\sum b_k$ è div.

$$1+\frac{1}{k} \le 1+\frac{2}{k}$$
$$\Downarrow$$
$$0 \le \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}_{b_k} \le \underbrace{\log\left(1+\frac{2}{k}\right)}_{a_k}$$

per il criterio del confr $\quad \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right)}_{\text{diverge}} \le \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{2}{k}\right)}_{\text{diverge}}$

$\Rightarrow$

per il criterio del confronto concludo che la serie data diverge.

ES 3)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k(k+2)}}_{a_k}$$

? conv / div / indet

1) $\forall k \geq 1$, $a_k \geq 0$ $\Rightarrow$ la serie è a. t.p e non può essere indet.

2) $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k(k+2)} = 0$ non è d'aiuto

3) vedo se il criterio del confronto aiuta.

ricordo che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ è conv.

$$0 \le \frac{1}{k(k+2)} \le \frac{1}{k(k+1)} \quad \forall k \geq 1$$

$$0 \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} \le \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}}_{\text{so che è convergente}},$$

converge $\Leftarrow$ per il criterio del confronto

ES 4 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$? conv / div / indet

$a_k = \frac{1}{k} \geq 0 \quad \forall\, k \geq 1$ la serie data è a.t.p.

cerco tra le serie già viste una serie $\sum b_k$:

$a_k \sim \ell b_k$ quando $k \to \infty$
con $\ell \in (0, +\infty)$

$\frac{1}{k} \sim 1 \cdot \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ per $k \to \infty$ ℓ

$\left(\log(1+x) \sim x \text{ per } x \to 0 \right)$ $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1}$

quindi $b_k = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ e $\ell = 1$

$\Rightarrow$ per il criterio del conf. asintotico

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \sim \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$$

le due serie hanno = comportamento

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sim \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)}_{\text{diverge}}$$

diverge $\Leftarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ è la serie armonica ed è divergente

---

ES 5 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$? conv / div / indet

1) $a_k = \frac{1}{k^2} \geq 0 \quad \forall\, k \geq 1$ serie a t.p. non indet.

prendo $b_k = \frac{1}{k(k+1)} > 0$ e vedo che $\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k+1)}$ $k \to \infty$

$\ell = 1$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k^2+k}$$

per il criterio del c. asint. ho che

$$\sum a_k \sim \sum b_k \quad \text{cioè}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}}_{\text{conv}}$$

conv. $\Leftarrow$ conv

la serie data converge grazie al criterio del confronto asintotico.

ES 6 $\quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ $\quad$? conv / div / indet

$a_k = (-1)^k \frac{1}{k}$ $\quad$ $b_k = \frac{1}{k} > 0$ $\quad$ è una serie a termini di segno alterno

? posso applicare Leibniz

1) $\lim_{k \to \infty} b_k = 0$? sì $\quad \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0$

2) b_k è monotona decr ? sì $\quad b_k = \frac{1}{k}$ è decresc

sono verificate le ip del criterio di Leibniz $\Rightarrow$ la serie data converge

Se prendo $n = 10$, $\quad r_{10} = |S - S_{10}| \leq b_{11} = \frac{1}{11} \sim 0.1$

$n=10 \qquad b_{n+1}$

se $n = 100$ $\quad r_{100} = |S - S_{100}| \leq b_{101} = \frac{1}{101} \sim 10^{-2}$

ES7 $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^k \frac{1}{k^2}}_{a_k}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{converge}$$

$\Rightarrow$ dico che la serie data converge assolutamente

ES8 $\sum_{k=1}^{\infty} \overbrace{(-1)^k \frac{1}{k}}^{a_k}$ so che è una serie convergente

mi chiedo se è anche assolutamente convergente.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{serie armonica diverg.}$$

la serie dei valori ass non conv $\Rightarrow$ la serie non converge assolutamente.

Tuttavia la serie converge

$\sum |a_k|$ è div, $\quad \sum a_k$ è conv

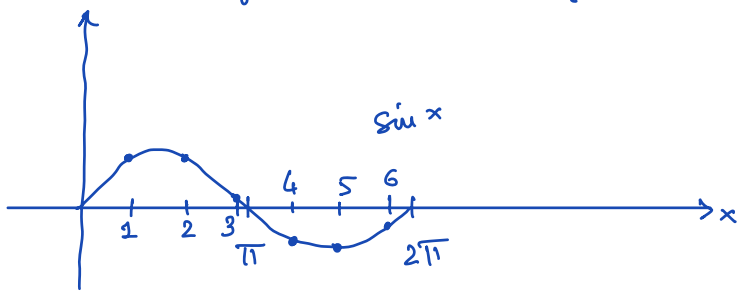
Se una serie non conv ass, ma conv, si dice che

CONVERGE SEMPLICEMENTE

ES 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$? conv/div/indet/conv.ass

$a_n = \frac{\sin n}{n^2}$ non è a t.p. $-1 \leq \sin n \leq 1$

a_n è a termini di segno alterno? no



$\sum a_n$ è generica

si studia $\sum |a_n|$ perché quest'ultima serie è a t.p. e posso applicare i criteri per le serie a t.p.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right|$$

$$0 \le |a_n| = \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \underset{|\sin n| \le 1}{\le} \frac{1}{n^2}$$

per il criterio del confronto ho che

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \le \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}$$

converge $\Leftarrow$ convergente (serie armonica gener. con $\lambda = 2 > 1$)

per il criterio del confronto

$\sum |a_n|$ converge, cioè la serie data converge assolutamente

per il criterio della conv. assoluta la serie data è anche convergente, cioè $\sum a_n$ conv

Es 10 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$

$a_n = \dfrac{e^n}{n!} > 0 \quad \forall n \geq 0 \qquad\qquad 0! = 1$

applico il criterio del rapporto

calcolo $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{e^n}{n!}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{e^{n+1}}\, e}{\underbrace{\cancel{(n+1)!}}_{(n+1)}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0 = \ell < 1$$

$(n+1)! = (n+1)\cdot n!$

per il criterio del rapporto la serie converge

Es 11 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} 3^n \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$

$a_n = 3^n \left(\dfrac{n-2}{n}\right)^{(n^2)} \geq 0 \quad \forall n \geq 3$

$= \left[3\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^n\right]^n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[\cancel{n}]{\left[3\left(\frac{n-2}{n}\right)^n\right]^{\cancel{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = 3 \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = 3 \cdot e^{-2} = \frac{3}{e^2} < 1$$

$e \sim 2.718 \qquad e^2 \sim 7\ldots$

Ho trovato $\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow$ la serie data converge per il criterio della radice.