ESERCIZI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

a cura di Michele Scaglia

ESERCIZI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL PRIMO ORDINE A VARIABILI SEPARABILI TRATTI DA TEMI D'ESAME

3) **[T.E. 11/01/2010]** Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4\sin x}{3y^2\,(1+\cos^2 x)} \\ y(\pi/2) = 1 \end{cases} .$$

Svolgimento.

Si tratta di un'equazione a variabili separabili, vale a dire un'equazione della forma

$$y' = g(x)h(y).$$

Nel nostro caso si ha

$$g(x) = \frac{4\sin x}{1+\cos^2 x}, \qquad h(y) = \frac{1}{3y^2}.$$

Abbiamo visto a lezione che per risolvere questo tipo di equazioni differenziali è possibile seguire una procedura formale molto comoda (comunque giustificabile teoricamente) che consente di interpretare la x e la y come se fossero due variabili indipendenti (separare cioè le variabili), anche se in realtà la y, la funzione incognita, è una funzione della x.

Si procede in questo modo: si riscrive (usando la notazione di derivata alla Leibniz)

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y),$$

da cui

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx.$$

Integrando membro a membro,

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx,$$

si ottiene un'espressione implicita dell'integrale generale dell'equazione originaria.

Applicando la procedura al nostro esercizio, troviamo

$$3y^2\,dy = \frac{4\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Integriamo membro a membro:

$$\int 3y^2\,dy = \int \frac{4\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

L'integrale a primo membro è immediato.
Occupiamoci del secondo membro:

$$\int \frac{4\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Si tratta in realtà di un integrale immediato.
In effetti il denominatore è dato dalla somma di due quadrati, il primo dei quali è costante e vale 1.
Si può quindi sperare di individuare lo sviluppo della derivata dell' arctan di una opportuna funzione.
In questo caso la candidata $f(x)$ è

$$f(x) = \cos x.$$

Servirebbe avere a numeratore la sua derivata, vale a dire

$$f'(x) = -\sin x.$$

Moltiplicando e dividendo per -1 si raggiunge lo scopo.
Si ha quindi, utilizzando anche la linearità dell'integrale,

$$\int \frac{4\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -4\int \frac{-\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -4\arctan(\cos x) + c.$$

Pertanto, tornando all'equazione differenziale, troviamo

$$y^3 = -4\arctan(\cos x) + c.$$

Imponiamo ancora a questo livello (in cui la soluzione $y(x)$ è implicita) la condizione di Cauchy, vale a dire

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

sostituendo nell'uguaglianza sopra al posto di x il valore $\frac{\pi}{2}$ e al posto di y il valore 1. Risulta

$$1^3 = -4\arctan\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) + c,$$

cioè

$$1 = -4\arctan 0 + c$$

da cui

$$c = 1 + 4 \arctan 0 = 1 + 0 = 1.$$

Pertanto

$$c = 1.$$

Sostuiamo $c = 1$ e ricaviamo $y(x)$. Si ha

$$y^3 = -4 \arctan(\cos x) + 1,$$

da cui

$$y(x) = \sqrt[3]{-4 \arctan x + 1}$$

4) **[T.E. 29/03/2010]** Determinare la funzione $y : \mathbb{R} \to (\log 9, +\infty)$, soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 6x^2 \left(1 - 7e^{-y}\right) \\ y(0) = \log 8 \end{cases} .$$

Svolgimento.

Si tratta di un'equazione a variabili separabili, vale a dire un'equazione della forma

$$y' = g(x)h(y).$$

Nel nostro caso si ha

$$g(x) = 6x^2, \quad h(y) = \left(1 - 7e^{-y}\right).$$

Separiamo le variabili:

$$\frac{1}{(1 - 7e^{-y})}\, dy = 6x^2\, dx,$$

integriamo membro a membro:

$$\int \frac{1}{(1 - 7e^{-y})}\, dy = \int 6x^2\, dx.$$

Risolviamo l'integrale a primo membro.
Si ha

$$\int \frac{1}{(1 - 7e^{-y})}\, dy = \int \frac{1}{1 - \frac{7}{e^y}}\, dy = \int \frac{1}{\frac{e^y - 7}{e^y}}\, dy =$$

$$= \int \frac{e^y}{e^y - 7}\, dy.$$

Poiché a numeratore compare la derivata del denominatore, si ha immediatamente

$$\int \frac{e^y}{e^y - 7}\, dy = \log |e^y - 7| \, .$$

Per quanto riguarda il secondo membro dell'equazione, si ha facilmente

$$\int 6x^2\, dx = 2x^3.$$

Pertanto, l'equazione integrale diviene

$$\log |e^y - 7| = 2x^3 + c.$$

Imponiamo la condizione di Cauchy

$$y(0) = \log 8.$$

Risulta

$$\log \left| e^{(\log 8)} - 7 \right| = 2 \cdot 0^3 + c,$$

cioè

$$\log |8 - 7| = c,$$

da cui

$$\log 1 = c,$$

vale a dire

$$c = 0.$$

Pertanto, risostituendo $c = 0$ troviamo

$$\log |e^y - 7| = 2x^3,$$

da cui

$$|e^y - 7| = e^{2x^3},$$

Poiché la consegna dell'esercizio dice che la soluzione da individuare deve assumere valori in

$(\log 9, +\infty)$, cioè deve essere

$$y > \log 9,$$

applicando la funzione esponenziale in base e (quindi crescente) a entrambi i membri della precedenze disequazione, si trova

$$e^y > 9.$$

Pertanto l'argomento del valore assoluto è sicuramente maggiore di 0 (a dire il vero risulta sempre maggiore di 2).
Possiamo quindi riscrivere

$$e^y - 7 = e^{2x^3}.$$

Isoliamo la funzione y (che è ciò che desideriamo ricavare):

$$e^y = 7 + e^{2x^3},$$

applicando a entrambi i membri il logaritmo in base e troviamo finalmente

$$y(x) = \log\left(7 + e^{2x^3}\right),$$

che è la soluzione del problema di Cauchy.

6) **[T.E. 29/06/2010]** Determinare la funzione $y(x)$ non identicamente nulla, soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{x^4+1} y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento.

L'equazione è a variabili separabili, cioè del tipo

$$y' = g(x)h(y),$$

essendo, nel nostro caso,

$$g(x) = \frac{x}{x^4+1}, \quad h(y) = y^{\frac{2}{3}}.$$

Separiamo le variabili: si ottiene

$$\frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = \frac{x}{1+x^4}\, dx,$$

cioè

$$y^{-\frac{2}{3}}\,dy = \frac{x}{1+x^4}\,dx.$$

Integriamo membro a membro.

$$\int y^{-\frac{2}{3}}\,dy = \int \frac{x}{1+x^4}\,dx.$$

Si ha facilmente

$$\int y^{-\frac{2}{3}}\,dy = \frac{y^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} = 3y^{\frac{1}{3}}.$$

Passiamo al secondo membro,

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,dx.$$

Il denominatore è dato dalla somma di 1 e del quadrato $(x^2)^2$.
Affinché l'integrando sia lo sviluppo della derivata dell'$\arctan(x^2)$ dev'esserci a numeratore la derivata di x^2, vale a dire $2x$.
Moltiplichiamo e dividiamo opportunamente per 2 l'integranda. Troviamo

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan(x^2).$$

Pertanto, l'equazione diviene

$$3y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\arctan(x^2) + c.$$

Imponendo che

$$y(0) = 0,$$

troviamo

$$3 \cdot 0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\arctan 0 + c,$$

cioè

$$c = 0.$$

Risostituendo $c = 0$ abbiamo

$$3y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\arctan(x^2),$$

da cui

$$y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \arctan(x^2).$$

Elevando al cubo entrambi i membri troviamo

$$y(x) = \left(\frac{1}{6} \arctan(x^2) \right)^3,$$

vale a dire la soluzione del problema di Cauchy assegnato.

8) **[T.E. 27/03/2013]** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4x\sqrt{y}}{3} \log(1 + x^2) \\ y(0) = \frac{1}{3^2} \end{cases}.$$

Svolgimento.

L'equazione differenziale che compare nel Problema di Cauchy assegnato è a variabili separabili, vale a dire della forma

$$y' = h(x)g(y),$$

essendo, nel nostro caso,

$$h(x) = \frac{4}{3} x \log(1 + x^2), \qquad h(y) = \sqrt{y}.$$

(abbiamo posto i coefficienti 4 e 3 assieme alla funzione $h(x)$; nulla avrebbe vietato di disporli diversamente).
Seguendo la solita procedura, abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} x \log(1 + x^2) \cdot y^{1/2},$$

da cui

$$\frac{1}{y^{1/2}} \, dy = \frac{4}{3} x \log(1 + x^2) \, dx.$$

Integriamo membro a membro:

$$\int \frac{1}{y^{1/2}} \, dy = \int \frac{4}{3} x \log(1 + x^2) \, dx.$$

Calcoliamo l'integrale del membro di sinistra.

Si ha

$$\int \frac{1}{y^{1/2}}\,dy = \int y^{-1/2}\,dy = \frac{y^{1/2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{y}.$$

Per quanto riguarda l'integrale di destra si ha

$$\int \frac{4}{3}x\log(1+x^2)\,dx = \frac{4}{3}\int x\log(1+x^2)\,dx.$$

Tale integrale lo svolgiamo tramite la formula di integrazione per parti (comparendo il prodotto di due funzioni di specie diversa non riconducibile allo sviluppo della derivata di una funzione composta).
Deriviamo la funzione $\log(1+x^2)$, integriamo la funzione x.
Si trova

$$\int x\log(1+x^2)\,dx = \frac{x^2}{2}\log(1+x^2) - \int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx.$$

Dobbiamo ora risolvere l'integrale

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx,$$

integrale di una funzione razionale fratta in cui il numeratore ha grado maggiore del denominatore.
Effettuando la divisione tra numeratore e denominatore si trovano quoziente x e resto $-x$.
Pertanto si ha

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

In definitiva,

$$\frac{4}{3}\int x\log(1+x^2)\,dx = \frac{4}{3}\left[\frac{x^2}{2}\log(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right].$$

Quindi si ha

$$2\sqrt{y} = \frac{4}{3}\left[\frac{x^2}{2}\log(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right] + c.$$

Imponendo la condizione iniziale

$$y(0) = \frac{1}{3^2},$$

si trova

$$2\cdot\sqrt{\frac{1}{3^2}} = \frac{4}{3}\cdot\left(0\log 1 - 0 + \frac{1}{2}\log 1\right) + c,$$

cioè
$$c = \frac{2}{3}.$$
Risostituendo $c = \frac{2}{3}$ nell'integrale generale troviamo
$$2\sqrt{y} = \frac{4}{3}\left[\frac{x^2}{2}\log(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right] + \frac{2}{3},$$
da cui
$$\sqrt{y} = \frac{2}{3}\left[\frac{x^2}{2}\log(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right] + \frac{1}{3},$$
cioè
$$\sqrt{y} = \frac{1}{3}\left[x^2\log(1+x^2) - x^2 + \log(1+x^2) + 1\right].$$
Per individuare la soluzione $y(x)$ occorre elevare al quadrato entrambi i membri. Si trova
$$y(x) = \frac{1}{9}\left[x^2\log(1+x^2) - x^2 + \log(1+x^2) + 1\right]^2.$$

7) **[T.E. 20/01/2011]** Determinare la soluzione $y(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' + (\log x)y = \log x \\ y(e) = 2 \end{cases} .$$

Svolgimento.

L'equazione può essere considerata sia lineare del primo ordine sia a variabili separabili. Infatti, come scritta nel testo dell'esercizio,
$$y' + (\log x)y = \log x$$
è della forma
$$y' + a(x)y = b(x),$$
cioè lineare del primo ordine con
$$a(x) = \log x, \quad b(x) = \log x,$$
definite e continue su $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$.

Se, invece, portiamo $\log x$ a secondo membro, otteniamo

$$y' = -(\log x)y + \log x,$$

vale a dire, raccogliendo $\log x$,

$$y' = \log x \cdot (-y + 1),$$

che è a variabili separabili, essendo della forma

$$y' = h(x)g(y).$$

Conviene trattare l'equazione come equazione a variabili separabili.
Separando le variabili troviamo

$$\frac{1}{1-y}\,dy = \log x\,dx.$$

Integriamo membro a membro.

$$\int \frac{1}{1-y}\,dy = \int \log x\,dx.$$

A primo membro:

$$\frac{1}{1-y}\,dy = -\int \frac{-1}{1-y}\,dy = -\log|1-y| = \log\frac{1}{|1-y|} = \log\frac{1}{|y-1|}.$$

L'integrale

$$\int \log x\,dx$$

lo si risolve per parti.
Risulta

$$\int \log x\,dx = x\log x - x.$$

Pertanto l'equazione diviene

$$\log\frac{1}{|y-1|} = x(\log x - 1) + c.$$

Imponendo che

$$y(e) = 2$$

si trova

$$\log \frac{1}{|2-1|} = x(\log x - 1) + c.$$

cioè

$$\log 1 = e \cdot 0 + c,$$

da cui

$$c = 0.$$

Risostituendo $c = 0$ troviamo

$$\log \frac{1}{|y-1|} = x(\log x - 1),$$

vale a dire

$$\frac{1}{|y-1|} = e^{x(\log x - 1)}$$

da cui

$$|y-1| = e^{x(1-\log x)}.$$

Poiché il dato iniziale dice che $y(e) = 2 > 1$, anche la soluzione del problema, definita in un intorno di $x = e$, sarà maggiore di 1. Pertanto, possiamo togliere il valore assoluto e otteniamo

$$y - 1 = e^{x(1-\log x)}$$

da cui, finalmente,

$$y(x) = 1 + e^{x(1-\log x)},$$

la soluzione cercata.

ESERCIZI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL PRIMO ORDINE A COEFFICIENTI CONTINUI TRATTI DA TEMI D'ESAME

1) **[T.E. 28/06/2013]** Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} y(x)$, dove y è la soluzione del problema di Cauchy

(1) $$\begin{cases} x^5y' + 7x^4y = x^4 - 1, \\ y(1) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento.

Il problema di Cauchy assegnato è riconducibile alla forma

(2) $$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \quad x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dove a, b sono due funzioni continue sull'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Per ottenere la forma $(2)_1$ dell'equazione differenziale data, occorre dividere i due membri di $(1)_1$ per x^5. Tale operazione è lecita in quanto il problema di Cauchy ha come dato iniziale il punto $x_0 = 1$, pertanto, in un suo intorno, la funzione x^5 si mantiene diversa da 0 (non scordiamo che le soluzioni dei problemi di Cauchy sono sempre definite su intervalli che contengono il dato iniziale).
Il più grande intervallo che sembra possiamo considerare nel cercare la soluzione del problema è

$$I =]0, +\infty[.$$

Dividiamo quindi entrambi i membri dell'equazione per la funzione $x^5 \neq 0$ e troviamo

$$y' + \frac{7}{x}y = \frac{x^4 - 1}{x^5}.$$

Tale equazione è lineare del primo ordine del tipo $(2)_1$ con

$$a(x) = \frac{7}{x}, \qquad b(x) = \frac{x^4 - 1}{x^5},$$

funzioni definite e continue sull'intervallo

$$I =]0, +\infty[.$$

Inoltre confrontando $(1)_2$ con $(2)_2$ ricaviamo che $x_0 = 1$ e $y_0 = 0$.
Per individuare la soluzione del problema di Cauchy dato seguiamo i seguenti passi:

1. costruiamo la funzione integrale $A_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt$:

$$A_1(x) = \int_1^x \frac{7}{t}\,dt = 7(\log(x) - \log(1)) = 7\log(x),$$

dove abbiamo omesso il valore assoluto per via del fatto che stiamo studiando l'equazione sull'intervallo $]0, +\infty[$, su cui è chiaramente $x > 0$, per cui $|x| = x$;

2. costruiamo

$$e^{A_{x_0}(x)} = e^{7\log(x)} = e^{\log(x^7)} = x^7;$$

3. Calcoliamo l'integrale

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A_{x_0}(t)}dt &= \int_1^x t^7\frac{t^4-1}{t^5}dt \\ &= \int_1^x (t^6 - t^2)\,dt = \left[\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{3}t^3\right]_1^x \\ &= \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{21};\end{aligned}$$

4. Calcoliamo la soluzione

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{1}{e^{A(x)}}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt\right) \\ &= \frac{1}{x^7}\left(0 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{21}\right) \\ &= \frac{1}{7} - \frac{1}{3x^4} + \frac{4}{21x^7}\end{aligned}$$

A questo punto calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} y(x).$$

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{7} - \frac{1}{3x^4} + \frac{4}{21x^7} = \left[\frac{1}{7} - 0 + 0\right] = \frac{1}{7}.$$

2) **[T.E. 04/07/2011]** Sia $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y\log x + x^x, \\ y(e) = e^e + 7 \end{cases} .$$

Calcolare $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

Svolgimento.

Il problema di Cauchy assegnato è riconducibile alla forma

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \quad x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

dove a, b sono due funzioni continue sull'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Effettivamente, l'equazione si può riscrivere come

$$y' - \log x \cdot y = x^x.$$

Risulta quindi

$$a(x) = -\log x, \quad b(x) = x^x, x_0 = e, \quad y_0 = e^e + 7.$$

Per individuare la soluzione del problema di Cauchy dato seguiamo i seguenti passi:

1. costruiamo la funzione integrale $A_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x a(t)dt$:

$$A_e(x) = \int_e^x -\log t\, dt = -[t\log t - t]_e^x = -x\log x + x + e - e$$

(abbiamo applicato la formula di integrazione per parti);

2. costruiamo

$$e^{A_{x_0}(x)} = e^{-x\log x + x} = \frac{1}{x^x} \cdot e^x;$$

3. Calcoliamo l'integrale

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x b(t)e^{A_{x_0}(t)}dt &= \int_e^x t^t \frac{e^t}{t^t} dt \\ &= \int_e^x e^t dt = e^x - e^e; \end{aligned}$$

4. Calcoliamo la soluzione

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{e^{A(x)}}\left(y_0 + \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)}dt\right) \\ &= \frac{x^x}{e^x}\left(e^e + 7 + e^x - e^e\right) \\ &= x^x(1 + 7e^{-x}) \end{aligned}$$

Il testo chiedeva di calcolare il

$$\lim_{x\to+\infty} y(x).$$

Risulta

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} x^x(1+7e^{-x}) = \lim_{x\to+\infty} x^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\log x} = +\infty.$$

L'esercizio è concluso.

5) **[T.E. 29/06/2009]** Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x-1}y = \dfrac{2x}{x-1} \\ y(2) = 1 \end{cases} .$$

Svolgimento.

Il problema di Cauchy assegnato è riconducibile alla forma

$$(4) \qquad \begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \quad x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dove a, b sono due funzioni continue sull'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.
Abbiamo

$$a(x) = \frac{1}{x-1}, \quad b(x) = \frac{2x}{x-1}, \quad x_0 = 2, \quad y_0 = 1;$$

$a(x)$ e $b(x)$ sono definite e continue per ogni $x \neq 1$ la soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale sarà definita su uno dei due intervalli

$$]-\infty, 1[\quad \text{oppure} \quad]1, +\infty[.$$

D'altra parte, poiché il dato iniziale del problema di Cauchy è in $x_0 = 2 > 1$, scegliamo l'intervallo

$$I =]1, +\infty[,$$

come intervallo di definizione della soluzione del problema assegnato.
Supposto d'ora in poi $x > 1$, seguiamo lo schema risolutivo tipico delle equazioni lineari del primo ordine.

1. costruiamo la funzione integrale $A_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt$:

$$A_2(x) = \int_2^x \frac{1}{t-1}\,dt = [\log|t-1|]_2^x = \log(x-1) - \log(1) = \log(x-1)$$

   dove abbiamo omesso il valore assoluto per via del fatto che stiamo studiando l'equazione sull'intervallo $]1, +\infty[$;

2. costruiamo

$$e^{A_{x_0}(x)} = e^{\log(x-1)} = x - 1;$$

3. Calcoliamo l'integrale

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A_{x_0}(t)}dt &= \int_2^x (t-1)\frac{2t}{t-1}dt \\ &= \int_2^x 2t\,dt = [t^2]_2^x = x^2 - 4; \end{aligned}$$

4. Calcoliamo la soluzione

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{e^{A(x)}}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt\right) \\ &= \frac{1}{x-1}\left(1 + x^2 - 4\right) = \frac{x^2-3}{x-1}. \end{aligned}$$

La soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{x^2-3}{x-1}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE LINEARI E A COEFFICIENTI COSTANTI

Sono quelle equazioni della forma

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x), \tag{5}$$

ove $a, b \in \mathbb{R}$ e $f(x)$ è una assegnata funzione.

Nel caso in cui $f(x) = 0$, l'equazione si dice omogenea.

In generale, l'equazione (5) ammette infinite soluzioni dipendenti da due parametri. Se si desidera individuare una particolare soluzione dell'equazione data è sufficiente aggiungere due condizioni iniziali, dando luogo al cosiddetto **Problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} .$$

Tra le infinite soluzioni dell'equazione (5) si individua quella particolare soluzione $y(x)$ che obbedisca alle due richieste aggiuntive.

In generale, se non sono assegnate condizioni iniziali, si dovranno trovare infinite soluzioni con due parametri liberi.

Richiamiamo i risultati teorici concernenti la risoluzione di una equazione differenziale quale la (5).

La generica soluzione $y(x)$ della (5) è data da

$$\boldsymbol{y(x) = y_0(x) + y_p(x)},$$

essendo

- $y_0(x)$ la generica soluzione dell'equazione omogenea associata alla (5), vale a dire l'equazione differenziale
$$y'' + ay' + by = 0;$$
- $y_p(x)$ una soluzione particolare della equazione non omogenea di partenza, vale a dire
$$y'' + ay' + by = f(x).$$

Si tratta ora di esporre un procedimento che ci consenta di trovare $y_0(x)$ (vale a dire la soluzione dell'equazione omogenea associata) e $y_p(x)$ (una soluzione particolare dell'equazione iniziale).

RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA

Assegnata

$$y'' + ay' + by = 0,$$

si introduce la cosiddetta equazione caratteristica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

(tale equazione la si ottiene introducendo la nuova incognita λ ed elevandola al grado pari all'ordine di derivazione che compare nell'equazione differenziale).
Si tratta di una equazione di secondo grado. A seconda del valore del discriminante (Δ), tale equazione può ammettere due soluzioni reali distinte, due soluzioni reali e coincidenti o due soluzioni immaginarie e coniugate.
A seconda della situazione che si presenta, la soluzione $y_0(x)$ dell'equazione omogenea assegnata assumerà forme diverse. Analizziamo i vari casi.

- $\Delta > 0$: soluzioni reali e distinte, cioè $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
  In questo caso la soluzione dell'equazione differenziale è

  $$y_0(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- $\Delta = 0$: soluzioni reali e coincidenti: $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Chiamiamo λ_1 entrambe le radici.
  In questo caso la soluzione dell'equazione differenziale è

  $$y_0(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- $\Delta < 0$: due soluzioni immaginarie e coniugate: $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.
  In questo caso la soluzione genearle dell'equazione omogenea assegnata è

  $$y_0(x) = c_1 e^{ax} \cos(bx) + c_2 e^{ax} \sin(bx), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Mostriamo degli esempi.

1) Si trovi la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Svolgimento.

Si tratta di un'equazione differenziale omogenea.

Passiamo all'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Risolviamo l'equazione.
Troviamo

$$\lambda_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2},$$

da cui le due soluzioni reali e distinte

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3.$$

Per lo schema precedente, la soluzione generale dell'equazione assegnata è

$$y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2) Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}.$$

Svolgimento.

In questo esercizio non è richiesto di trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale, bensì di trovare la soluzione particolare $y(x)$ tale che

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Cominciamo a trovare la soluzione generale. In seguito imporremo che la soluzione generale obbedisca alle richieste assegnate.

Introduciamo quindi l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Risolviamola. Troviamo

$$\lambda_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3 \pm 0,$$

da cui le due soluzioni reali e coincidenti

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è dunque

$$y_0(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Adesso dobbiamo imporre che la soluzione trovata verifichi

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}.$$

A tale scopo ci occorre calcolare la derivata prima della soluzione appena trovata. Risulta

$$y_0'(x) = 3c_1 e^{3x} + c_2 \cdot \left(e^{3x} + x \cdot 3e^{3x}\right).$$

Imponiamo le condizioni iniziali (sostituendo al posto di x il valore 0):

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 e^0 + c_2 \cdot 0 \cdot e^0 = 1 \\ 3c_1 e^0 + c_2(e^0 + 0) = 1 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ 3c_1 + c_2 = 1 \end{cases}.$$

Risolvendo si ricava immediatamente

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -2 \end{cases}.$$

Pertanto la soluzione particolare del Problema di Cauchy considerato è

$$y_0(x) = e^{3x} - 2xe^{3x}.$$

3) Si trovi la soluzione generale dell'equazione

$$y'' + 3y' + 4 = 0.$$

Svolgimento.

In questo caso non dobbiamo risolvere un problema di Cauchy. Dobbiamo semplicemente determinare la generica soluzione dell'equazione differenziale assegnata.

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0.$$

Risolviamo:

$$\lambda_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}i}{2} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Le soluzioni sono proprio del tipo

$$a \pm ib,$$

essendo, nel nostro caso, $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

La soluzione generale dell'equazione differenziale è quindi

$$y_0(x) = c_1 e^{-3/2} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + c_2 e^{-3/2} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE NON OMOGENEA

Esponiamo una regola che consenta di trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea

$$y'' + ay' + by = f(x),$$

nel caso particolare in cui $f(x)$ sia della forma

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \cos(\beta x) \quad \text{oppure} \quad f(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \sin(\beta x),$$

essendo $P_n(x)$ un polinomio di grado n e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è da cercarsi tra le funzioni della forma

$$\boldsymbol{y_p(x) = x^m \cdot e^{\alpha x} \cdot (Q_n(x) \sin(\beta x) + S_n(x) \cos(\beta x))},$$

essendo

- $\boldsymbol{m}$ la **molteplicità** del numero complesso

$$\boldsymbol{\alpha + i\beta}$$

  come **radice** dell'**equazione caratteristica** associata all'equazione omogenea.
  Spieghiamo meglio.

  Se $\alpha + i\beta$ non risolve l'equazione caratteristica, tale numero ha molteplicità 0 come soluzione di tale equazione, pertanto $m = 0$, quindi il fattore x^m diviene $x^0 = 1$.

  Se invece, $\alpha + i\beta$ soddifa l'equazione caratteristica una sola volta (molteplicità di soluzione $m = 1$), avremo $x^m = x$.

  Infine, se $\alpha + i\beta$ è soluzione contata due volte dell'equazione caratteristica (vale a dire con molteplicità $m = 2$, si avrà $x^m = x^2$).

- $\boldsymbol{Q_n(x)}$ e $\boldsymbol{S_n(x)}$ sono due **generici polinomi dello stesso grado di** $\boldsymbol{P_n(x)}$, **cioè** di grado $\boldsymbol{n}$.

Mostriamo immediatamente un esempio che consenta di capire lo schema appena illustrato.

1) Si trovi l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(3x + 1).$$

Svolgimento.

Sappiamo che la soluzione generale di tale equazione (non omogenea) è data da

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x),$$

essendo

- $y_0(x)$ la generica soluzione dell'equazione omogenea associata alla (5), vale a dire l'equazione differenziale
$$y'' + ay' + by = 0;$$
- $y_p(x)$ una soluzione particolare della equazione non omogenea di partenza, vale a dire
$$y'' + ay' + by = f(x).$$

Calcoliamo $y_0(x)$, come già spiegato nelle pagine precedenti.
L'equazione omogenea associata, vale a dire

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

ha come equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Risolvendo otteniamo

$$\lambda_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2},$$

da cui

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2,$$

entrambe reali.
La soluzione generale dell'equazione omogenea è quindi

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo $y_p(x)$ seguendo lo schema illustrato in questo paragrafo.
L'equazione non omogenea assegnata,

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(3x + 1)$$

ha il secondo membro del tipo

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \cos(\beta x).$$

In particolare si ha

$$f(x) = e^{2x}(3x+1)\cos(0x)$$

(ricordiamo che quando non compare la funzione goniometrica, si deve intendere la presenza del fattore $\cos(0x)$).
Si ha quindi

$$\alpha = 2, \quad \beta = 0, \quad P_n(x) = 3x+1, \quad \text{quindi } n = 1.$$

Dobbiamo quindi cercare una soluzione della forma

$$y_p(x) = x^m \cdot e^{\alpha x} \cdot (Q_n(x)\sin(\beta x) + S_n(x)\cos(\beta x)),$$

Poiché $Q_n(x)$ e $S_n(x)$ devono essere due generici polinomi dello stesso grado di $P_n(x)$, vale a dire 1, si avrà

$$y_p(x) = x^m \cdot e^{2x} \cdot (Q_1(x)\sin(0x) + S_1(x)\cos(0x)) = y_p(x) = x^m \cdot e^{2x} \cdot ((Ax+B)).$$

Dobbiamo però ancora individuare il valore di m. Ricordiamo che m è la molteplicità del numero complesso $\alpha + i\beta$ come radice dell'equazione caratteristica.
Nel nostro caso si ha

$$\alpha + i\beta = 2 + i0 = 2.$$

Se controlliamo le soluzioni dell'equazione caratteristica, ci accorgiamo che 2 è proprio soluzione (contata 1 sola volta; l'altra soluzione, infatti, è $\lambda = 1$).
Pertanto, in questo caso si ha

$$m = 1,$$

quindi $x^m = x$.
A questo punto siamo in grado di dire quale sia la forma della candidata soluzione dell'equazione non omogenea:

$$y_p(x) = x \cdot e^{2x} \cdot (Ax+B),$$

cioè

$$y_p(x) = e^{2x} \cdot (Ax^2 + Bx).$$

Affinché $y_p(x)$ sia veramente una soluzione dell'equazione originaria assegnata, essa (assieme alle sue derivate) deve soddisfare l'equazione medesima, cioè

(6) $$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(3x+1).$$

Calcoliamo quindi $y_p'(x)$, $y_p''(x)$ e imponiamo che $y(x)$, $y_p'(x)$ e $y_p''(x)$ obbediscano all'equazione. Si ha

$$y_p'(x) = 2e^{2x}(Ax^2 + Bx) + e^{2x}(2Ax + B),$$

$$y_p''(x) = 4e^{2x}(Ax^2 + Bx) + 2e^{2x}(2Ax + B) + 2e^{2x}(2Ax + B) + 2Ae^{2x}.$$

Sostituendo nell'equazione (6) si trova

$$\left(4e^{2x}(Ax^2 + Bx) + 2e^{2x}(2Ax + B) + 2e^{2x}(2Ax + B) + 2Ae^{2x}\right) +$$

$$-3\left(2e^{2x}(Ax^2 + Bx) + e^{2x}(2Ax + B)\right) + 2\left(e^{2x} \cdot (Ax^2 + Bx)\right) = e^{2x}(3x + 1).$$

Raccogliamo opportunamente.
Risulta

$$e^{2x}\left(4Ax^2 + 4Bx + 4Ax + 2B + 4Ax + 2B + 2A - 6Ax^2 - 6Bx - 6Ax - 3B + 2Ax^2 + 2Bx\right) =$$

$$= e^{2x}(3x + 1),$$

cioè

$$e^{2x}\left[(2A)x + (B + 2A)\right] = e^{2x}(3x + 1).$$

Affinché l'equazione risulti soddisfatta, deve succedere che il membro di sinistra sia uguale al membro di destra.
Imponiamo quindi che

$$\begin{cases} 2A = 3 \\ B + 2A = 1 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} A = \frac{3}{2} \\ B = -2 \end{cases}.$$

Pertanto, una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (6) è la funzione

$$y_p(x) = e^{2x} \cdot \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x\right).$$

A questo punto possiamo scrivere la generica soluzione dell'equazione assegnata.
Si ha

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + e^{2x} \cdot \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x\right).$$

Si tratta di infinite soluzioni dipendenti da 2 parametri liberi c_1, c_2. Se il testo avesse posto due opportune condizioni iniziali (problema di Cauchy), avremmo dovuto individuare i valori delle costanti c_1 e c_2 in modo da rendere verificate da $y(x)$ le suddette condizioni.

2) **[T.E. 11/02/2011]** Determinare la soluzione $y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 2x^2 \\ y(0) = 12 \\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento.

In questo esercizio non viene chiesto di individuare semplicemente l'integrale generale di un'equazione differenziale, bensì viene chiesto di determinare la soluzione di un ben preciso problema di Cauchy.
Procederemo come nell'esercizio precedente individuando la soluzione generale dell'equazione (senza considerare il problema di Cauchy). Troveremo cioè la generica soluzione

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

dipendente da due parametri liberi c_1 e c_2. Solo successivamente, troveremo la soluzione del problema di Cauchy, imponendo che $y(x)$ verifichi le due condizioni iniziali (dovremo quindi determinare i valori di c_1 e c_2).

Cominciamo quindi a trovare l'**integrale generale**.
Risolviamo quindi l'equazione

$$y'' + 2y' + y = 2x^2.$$

L'integrale generale di tale equazione è dato da

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x).$$

Calcoliamo $y_0(x)$, vale a dire la generica soluzione dell'equazione omogenea associata, cioè

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$

vale a dire

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$

che risoltà dà le due soluzioni reali coincidenti

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Di conseguenza, ricordando qiuanto esposto nelle prime pagine, si avrà che la soluzione generale dell'omogenea è

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea assegnata, vale a dire

$$y'' + 2y' + y = 2x^2.$$

La $f(x)$ a secondo membro, cioè

$$f(x) = 2x^2 = e^{0x}(2x^2)\cos(0x)$$

è proprio del tipo

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \cos(\beta x),$$

essendo, nel nostro caso,

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad P_n(x) = 2x^2 \quad (\text{quindi } n = 2).$$

Cerchiamo quindi una soluzione della non omogenea nella famiglia di funzioni

$$y_p(x) = x^m e^{0x} \left[Q_2(x)\cos(0x) + S_2(x)\sin(0x)\right],$$

cioè

$$y_p(x) = x^m (Ax^2 + Bx + C).$$

Dobbiamo individuare il valore di m.
Ricordiamo che m è la molteplicità del numero

$$\alpha + i\beta$$

come radice dell'equazione caratteristica.
Poiché

$$\alpha + i\beta = 0 + i0$$

non è soluzione dell'equazione caratteristica (ricordiamo infatti che le soluzioni sono $\lambda_{1/2} = -1$), si avrà

$$m = 0,$$

quindi $x^m = x^0 = 1$.
Pertanto la soluzione particolare la cerchiamo tra le funzioni

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Imponiamo quindi che tale generica funzione obbedisca all'equazione non omogenea

$$y'' + 2y' + y = 2x^2.$$

Dobbiamo quindi calcolare $y_p'(x)$ e $y_p''(x)$, sostituirle nell'equazione e imporre che risulti un'identità (in x).
Si ha

$$y_p'(x) = 2Ax + B,$$

$$y_p''(x) = 2A.$$

Sostituiamo e otteniamo

$$2A + 2(2Ax + B) + (Ax^2 + Bx + C) = 2x^2,$$

da cui

$$x^2(A) + x(4A + B) + (2A + 2B + C) = 2x^2 = 2x^2 + 0x + 0.$$

Affinché la precedente equazioni risulti un'identità si dovrà avere, per il principio di identità dei polinomi,

$$\begin{cases} A = 2 \\ 4A + B = 0 \\ 2A + 2B + C = 0 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} A = 2 \\ B = -8 \\ C = 12 \end{cases}.$$

Pertanto, una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è

$$y_p(x) = 2x^2 - 8x + 12.$$

Ne segue che l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 2x^2 - 8x + 12.$$

A questo punto dobbiamo trovare la soluzione particolare (tra le infinite appena scritte) che soddisfi alle richieste del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(0) = 12 \\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Deriviamo quindi la soluzione $y(x)$ generale. Si ha

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2 x e^{-x} + 4x - 8.$$

Sostituiamo in $y(x)$ e in $y'(x)$ il valore $x = 0$ e imponiamo quanto dettato dalle condizioni iniziali.
Si deve avere

$$\begin{cases} y(0) = 12 \\ y'(0) = 0 \end{cases} ,$$

cioè

$$\begin{cases} c_1 e^0 + c_2 \cdot 0 \cdot e^0 + 2 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 12 = 12 \\ -c_1 e^0 + c_2 e^0 - c_2 \cdot 0 \cdot e^0 + 4 \cdot 0 - 8 = 0 \end{cases} .$$

Il sistema diviene

$$\begin{cases} c_1 + 12 = 12 \\ -c_1 + c_2 - 8 = 0 \end{cases} .$$

Risolvendo si trova

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 8 \end{cases} .$$

Pertanto la soluzione (unica) del problema di Cauchy assegnato è

$$y(x) = 0e^{-x} + 8xe^{-x} + 2x^2 - 8x + 12,$$

vale a dire

$$y(x) = 8xe^{-x} + 2x^2 - 8x + 12.$$

3) [**T.E. 26/01/2009**] Determinare la soluzione $y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 49y = \cos x \\ y(0) = \frac{1}{48} \\ y'(0) = 7 \end{cases} .$$

Svolgimento.

Anche in questo esercizio è richiesto di individuare la soluzione di un problema di Cauchy.
Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea.
Individuiamo anzitutto l'integrale generale

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x),$$

successivamente individueremo la particolare soluzione del problema di Cauchy (determinando i valori delle costanti d'integrazione c_1 e c_2).
Cominciamo a trovare $y_0(x)$, vale a dire la soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione, cioè

$$y'' + 49y = 0.$$

Introduciamo l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 49 = 0.$$

Risulta

$$\lambda^2 = -49,$$

da cui

$$\lambda_{1/2} = \pm 7i,$$

cioè le due soluzioni (complesse e coniugate della forma $a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$)

$$\lambda_1 = 0 - 7i, \quad \lambda_2 = 0 + 7i.$$

In questi casi, la soluzione della equazione omogenea è

$$y_0(x) = c_1 e^{ax} \cos(bx) + c_2 e^{ax} \sin(bx),$$

nella fattispecie

$$y_0(x) = c_1 e^{0x} \cos(7x) + c_2 e^{0x} \sin(7x),$$

cioè

$$y_0(x) = c_1 \cos 7x + c_2 \sin 7x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Individuata la generica soluzione della equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della equazione non omogenea iniziale, vale a dire

$$y'' + 49y = \cos x.$$

Il secondo membro

$$f(x) = \cos x,$$

ovvero

$$f(x) = e^{0x} \cdot 1 \cdot \cos(1x)$$

è proprio della forma

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \cos(\beta x),$$

essendo, nel nostro caso,

$$\alpha = 0, \ \beta = 1, \ \ P_n(x) = 1 \ \ (\text{quindi } n = 0)$$

Cerchiamo quindi una soluzione particolare della forma

$$y_p(x) = x^m e^{0x} \left(A \cos(x) + B \sin(x) \right), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

(osserviamo che A e B sono due generici polinomi $Q_0(x)$ e $S_0(x)$ di grado 0, vale a dire lo stesso grado di $P_0(x) = 1$ che compare in $f(x)$).
Dobbiamo individuare m, vale a dire la molteplicità di

$$\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 1 = i$$

come soluzione dell'equazione caratteristica.
Poiché i non è soluzione dell'equazione caratteristica (ricordiamo, infatti, che le soluzioni sono $\lambda = \pm 7i$), si ha

$$m = 0.$$

Pertanto $x^m = x^0 = 1$, quindi la soluzione particolare che cerchiamo è della forma

$$y_p(x) = A \cos x + B \sin x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Affinché tale funzione soddisfi l'equazione non omogenea, è necessario imporre che essa e le sue derivate soddisfino all'equazione stessa, cioè

$$y'' + 49y = \cos x.$$

Deriviamo due volte $y_p(x)$. Otteniamo

$$y_p'(x) = -A \sin x + B \cos x,$$

$$y_p''(x) = -A \cos x - B \sin x.$$

Sostituendo nell'equazione, troviamo

$$-A \cos x - B \sin x + 49 \left(A \cos x + B \sin x \right) = \cos x,$$

vale a dire

$$48A \cos x + 48B \sin x = \cos x = 1 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x.$$

Affinché la precedente equazione risulti un'identità in x si deve ovviamente avere

$$\begin{cases} 48A = 1 \\ 48B = 0 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{48} \\ B = 0 \end{cases}.$$

Ne segue che la soluzione particolare dell'equazione non omogenea è

$$y_p(x) = \frac{1}{48} \cos x + 0 \sin x,$$

cioè

$$y_p(x) = \frac{1}{48} \cos x.$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1 \cos 7x + c_2 \sin 7x + \frac{1}{48} \cos x.$$

A questo punto completiamo la risoluzione dell'esercizio individuando la soluzione al problema di Cauchy.

Dobbiamo fare in modo che la generica soluzione della non omogenea soddisfi

$$\begin{cases} y(0) = \frac{1}{48} \\ y'(0) = 7 \end{cases}$$

Deriviamo $y(x)$.
Si ha

$$y'(x) = -7c_1 \sin 7x + 7c_2 \cos 7x - \frac{1}{48} \sin x.$$

Le richieste

$$\begin{cases} y(0) = \frac{1}{48} \\ y'(0) = 7 \end{cases}$$

si traducono in (sostituendo a x il valore 0)

$$\begin{cases} c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 + \frac{1}{48} \cos 0 = \dfrac{1}{48} \\ -7c_1 \sin 0 + 7c_2 \cos 0 - \dfrac{1}{48} \sin 0 = 7 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} c_1 + \dfrac{1}{48} = \dfrac{1}{48} \\ 7c_2 = 7 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}.$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = 0 \cos 7x + 1 \sin 7x + \frac{1}{48} \cos x,$$

cioè

$$y(x) = \sin 7x + \frac{1}{48} \cos x.$$