ESERCIZI SUI PUNTI DI DISCONTINUITÀ TRATTI DA TEMI D'ESAME

a cura di Michele Scaglia

FUNZIONI CONTINUE

Sia $f : \mathrm{dom} f \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in \mathrm{dom} f$ (esista cioè $f(x_0) \in \mathbb{R}$).

Possono verificarsi due casi:

1. il punto x_0 è isolato: in tal caso f è per definizione **continua** nel punto x_0;
2. il punto x_0 è di accumulazione per $\mathrm{dom} f$: in tal caso diciamo che f è **continua in x_0** se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0). \tag{1}$$

   In altre parole, se x_0 è di accumulazione per $\mathrm{dom} f$, diremo che f è continua in x_0 se esiste il limite per $x \to x_0$ di f e tale limite coincide col valore che la funzione assume nel punto x_0.

Diciamo che f è **discontinua** in x_0 se non è continua in $x_0 \in \mathrm{dom} f$. Poiché f può essere discontinuta solo in un punto di accumulazione, avremo che la funzione f è discontinua in x_0 se risulta negata la condizione (1).
A seconda del tipo di negazione della (1) si definiscono 4 tipologie di punti di discontinuità per una funzione f.

PUNTI DI DISCONTINUITÀ

Sia $f : \mathrm{dom} f \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in \mathrm{dom} f$ di accumulazione per $\mathrm{dom} f$.
Classifichiamo i possibili tipi di discontinuità.

- Diciamo che x_0 è un **punto di salto** se esistono finiti limite sinistro e limite destro di f in x_0 ma sono divesrsi. In formule:

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \quad \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = m \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \ell \neq m.$$

  In tale caso chiamiamo **salto** il numero reale positivo

$$|\ell - m|.$$

- Diciamo che x_0 è un **punto di discontinuità eliminabile** se esistono finiti e coincidenti limite sinistro e limite destro di f in x_0 ma sono diversi da $f(x_0)$. In formule:

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell = \lim_{x \to x_0^+} f(x), \quad \ell \in \mathbb{R}, \quad \text{ma } \ell \neq f(x_0).$$

- Diciamo che x_0 è un **punto di infinito** se esistono sia limite sinistro sia limite destro di f in x_0 e almeno uno dei due vale ∞. In formule:

$$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x), \qquad \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) \quad \text{e}$$
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty.$$

- Diciamo che x_0 è un **punto di discontinuità di seconda specie** se almeno uno tra limite sinistro e limite destro f in x_0 non esiste. In formule:

$$\nexists \lim_{x\to x_0^-} f(x) \qquad \text{oppure} \qquad \nexists \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

ESERCIZI SVOLTI

1) **[T.E. 26/01/2009]**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sin(x-1) + (x-1)^2}{2\left(e^{x-1} - 1\right)} & \text{se } x \neq 1, \\ \alpha - 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $x = 1$. Negli altri casi classificare il tipo di discontinuità.

Svolgimento.

Osserviamo che f è definita nel punto $x_0 = 1$ e che $x_0 = 1$ è un punto di accumulazione per dom$f$. Ne segue che la funzione f risulta continua in $x_0 = 1$ se e soltanto se

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1).$$

Anzitutto, per definizione di f, si ha immediatamente

$$f(1) = \alpha - 1.$$

Per quanto riguarda i due limiti (destro e sinistro in $x = 1$), essi vanno calcolati entrambi sulla funzione

$$\frac{2\sin(x-1) + (x-1)^2}{2\left(e^{x-1} - 1\right)}.$$

Calcoliamo ad esempio

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2\sin(x-1) + (x-1)^2}{2\left(e^{x-1} - 1\right)}.$$

Poiché $x \to 1^-$, si avrà $(x-1) \to 0^-$.

Il limite si presenta quindi nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$.
Poiché risulta

$$\sin y \quad \sim \quad y, \qquad e^y - 1 \quad \sim \quad y \quad \text{ per } y \to 0,$$

avremo, posto $y = (x-1) \to 0$ per $x \to 1^-$,

$$\sin (x-1) \quad \sim \quad (x-1), \qquad e^{x-1} - 1 \quad \sim \quad (x-1) \quad \text{ per } x \to 1^-.$$

Per il numeratore avremo quindi

$$2\sin(x-1) + (x-1)^2 \quad \sim \quad 2(x-1) + (x-1)^2 \quad \sim \quad 2(x-1) \quad \text{ per } x \to 1^-,$$

in quanto, in presenza di più addendi infinitesimi, si è interessati al termine di ordine di infinitesimo minore.
A denominatore si ha

$$2\left(e^{x-1} - 1\right) \quad \sim \quad 2(x-1) \;\text{ per } x \to 1^-.$$

Possiamo tornare al limite iniziale e troviamo

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2\sin(x-1) + (x-1)^2}{2\left(e^{x-1} - 1\right)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} 1 = 1.$$

Allo stesso modo, si trova che anche

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2\sin(x-1) + (x-1)^2}{2\left(e^{x-1} - 1\right)} = 1.$$

Pertanto f è **continua** in $\boldsymbol{x = 1}$ se e solo se

$$\alpha - 1 = 1,$$

ossia, se e solo se

$$\boldsymbol{\alpha = 2}.$$

Nel caso in cui $\boldsymbol{\alpha \neq 2}$, la funzione f presenta in $\boldsymbol{x = 1}$ un punto di **discontinuità eliminabile** (in quanto i due limiti sinistro e destro coincidono ma sono diversi dalla $f(1)$).

2) **[T.E. 09/01/2007]**
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-7)}{\arctan(x-7)} + \dfrac{e^{x-8} - 1}{(x-8)^2} & \text{se } x \neq 7 \text{ e } x \neq 8, \\ e^{-1} & \text{se } x = 7 \text{ o } x = 8. \end{cases}$$

Discutere la continuità di f nel suo dominio.

Svolgimento.

In questo esercizio dobbiamo indagare sulla natura di due eventuali punti discontinuità, $x = 7$ e $x = 8$, che risultano di accumulazione per dom$f$. Al di fuori di tali punti, la funzione f è definita ed è continua in quanto somma, quoziente e composizione di funzioni continue.
Il dubbio resta solo attorno ai punti $x = 7$ e $x = 8$ nei quali, osserviamo, la funzione è definita; potrebbe però succedere che i limiti destro e sinistro attorno a tali punti siano tali da non rendere complessivamente continua la funzione f.

Cominciamo con $x = 7$.
Anzitutto osserviamo che, in base alla definizione di f, risulta

$$f(7) = e^{-1}.$$

Calcoliamo ora il

$$\lim_{x\to 7} f(x) = \lim_{x\to 7}\left[\frac{(x-7)}{\arctan(x-7)} + \frac{e^{x-8}-1}{(x-8)^2}\right].$$

Si tratta del limite di una somma di due funzioni. Per i teoremi sui limiti, il limite di una somma è uguale alla somma dei limiti, quando questa è bene definita (non si generano cioè forme indeterminate).
Calcoliamo separatamente i due limiti.
Ricordando il limite notevole

$$\lim_{t\to 0}\frac{\arctan t}{t} = 1$$

da cui l'approssimazione

$$\arctan t \quad \sim \quad t \quad \text{per } t \to 0,$$

avremo, posto $t = (x-7) \to 0$ quando $x \to 7$,

$$\arctan(x-7) \quad \sim \quad (x-7) \quad \text{per } x \to 7,$$

da cui

$$\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{\arctan(x-7)} = \lim_{x\to 7}\frac{x-7}{x-7} = 1.$$

Alternativamente, senza ricorrere alle approssimazioni con gli infinitesimi equivalenti, si potrebbe scrivere, in forza del teorema di sostituzione e del teorema del limite sul quoziente,

$$\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{\arctan(x-7)} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\arctan t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\arctan t}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Consideriamo la seconda funzione. Poiché $x \to 7$, si ha banalmente $(x-8) \to -1$. Poiché la funzione esponenziale è continua su tutto $\mathbb{R}$, quindi anche in -1, avremo, dal teorema sul limite di un quoziente,

$$\lim_{x\to 7} \frac{e^{x-8}-1}{(x-8)^2} = \frac{e^{-1}-1}{1} = e^{-1}-1.$$

In definitiva si ha

$$\lim_{x\to 7} f(x) = \lim_{x\to 7} \left[\frac{(x-7)}{\arctan(x-7)} + \frac{e^{x-8}-1}{(x-8)^2} \right] = \left[(1) + \left(e^{-1}-1 \right) \right] = e^{-1} = f(7).$$

Pertanto f è **continua in $\boldsymbol{x = 7}$**.

Consideriamo ora il punto $x = 8$.

Anzitutto

$$f(8) = e^{-1}.$$

Valutiamo il limite

$$\lim_{x\to 8} \left[\frac{(x-7)}{\arctan(x-7)} + \frac{e^{x-8}-1}{(x-8)^2} \right].$$

Si ha immediatamente, a causa della continuità della funzione arctan su tutto $\mathbb{R}$ e a causa del limite di un quoziente,

$$\lim_{x\to 8} \frac{x-7}{\arctan(x-7)} = \frac{1}{\arctan 1} = \frac{4}{\pi}.$$

Poiché

$$e^y - 1 \quad \sim \quad y \;\; \text{per} \;\; y \to 0,$$

avremo, posto $y = (x-8) \to 0$ per $x \to 8$,

$$e^{x-8} - 1 \quad \sim \quad (x-8) \;\; \text{per } x \to 8,$$

da cui

$$\lim_{x\to 8} \frac{e^{x-8}-1}{(x-8)^2} = \lim_{x\to 8} \frac{(x-8)}{(x-8)^2} = \lim_{x\to 8} \frac{1}{(x-8)}.$$

Distinguendo limite sinistro e destro troviamo

$$\lim_{x\to 8^-} \frac{1}{x-8} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 8^+} \frac{1}{x-8} = +\infty.$$

Ne segue che

$$\lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{x\to 8^-} \left[\frac{(x-7)}{\arctan(x-7)} + \frac{e^{x-8}-1}{(x-8)^2}\right] = \left[\left(\frac{4}{\pi}\right) + (-\infty)\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 8^+} f(x) = \lim_{x\to 8^+} \left[\frac{(x-7)}{\arctan(x-7)} + \frac{e^{x-8}-1}{(x-8)^2}\right] = \left[\left(\frac{4}{\pi}\right) + (+\infty)\right] = +\infty.$$

Pertanto la funzione f non è continua in $\boldsymbol{x=8}$ e presenta un **punto di infinito**.

3) **[T.E. 29/03/2010]**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(x \cdot \log(2|x|)\right) + \dfrac{\sin(x-1)}{|x-1|} & \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq 1, \\ 1 & \text{se } x = 0 \text{ o } x = 1. \end{cases}$$

Discutere la continuità di f e classificare le eventuali discontinuità.

Svolgimento.

In questo esercizio cerchiamo di riscrivere la funzione $f(x)$ liberandoci dei valori assoluti.

Si ha

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}, \qquad |x-1| = \begin{cases} -(x-1) & \text{se } x < 1 \\ x-1 & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

Pertanto la funzione diviene

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(x \cdot \log(-2x)\right) + \dfrac{\sin(x-1)}{-(x-1)} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \arctan\left(x \cdot \log(2x)\right) + \dfrac{\sin(x-1)}{-(x-1)} & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ \arctan\left(x \cdot \log(2x)\right) + \dfrac{\sin(x-1)}{(x-1)} & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

Fuori da $x = 0$ e $x = 1$ la funzione è sicuramente continua.
Dobbiamo capire se risulti continua pure in $x = 0$ e in $x = 1$, entrambi di accumulazione per $\mathrm{dom} f$.

Cominciamo con $x = 0$.
Ricordiamo il limite notevole

$$\lim_{y\to 0^+} y^\alpha \cdot (\log y)^\beta = 0.$$

Poniamo $y = (-2x)$, da cui $x = -\frac{1}{2}y$; poiché $x \to 0^-$, si avrà $y \to 0^+$. Dal teorema di sostituzione si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left[\arctan\left(x \cdot \log(-2x)\right) + \frac{\sin(x-1)}{-(x-1)}\right] =$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \left[\arctan\left(-\frac{1}{2}y \cdot \log y\right) - \frac{\sin\left(-\frac{1}{2}y - 1\right)}{-\frac{1}{2}y - 1}\right].$$

Dal limite notevole richiamato poco fa (applicato con $\alpha = \beta = 1$), dalla continuità delle funzioni arctan e sin e dai teoremi sui limiti, si trova

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{y\to 0^+} \left[\arctan\left(-\frac{1}{2}y^1 \cdot (\log y)^1\right) - \frac{\sin\left(-\frac{1}{2}y - 1\right)}{-\frac{1}{2}y - 1}\right] = \left[\arctan 0 - \frac{\sin(-1)}{(-1)}\right] =$$

$$= 0 + \sin(-1) = \sin(-1).$$

Allo stesso modo,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \sin(-1).$$

D'altra parte

$$f(0) = 0,$$

quindi $\boldsymbol{x = 0}$ è un punto di **discontinuità eliminabile**.

Consideriamo ora $x = 1$.
Per il limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

combinato col teorema di sostituzione e con la continuità delle funzioni in gioco nei loro domini, si ha

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left[\arctan\left(x \cdot \log(2x)\right) + \frac{\sin(x-1)}{-(x-1)}\right] = \arctan(\log 2) - 1.$$

e

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left[\arctan\left(x \cdot \log(2x)\right) + \frac{\sin(x-1)}{(x-1)}\right] = \arctan(\log 2) + 1.$$

Pertanto $\boldsymbol{x = 1}$ è un **punto di salto** con salto

$$S = |\arctan(\log 2) - 1 - \arctan(\log 2) - 1| = 2.$$

4) **[T.E. 07/01/2003]**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{\pi}{x-1} + \dfrac{7\arctan(x-2)}{(x-2)^2} & \text{se } x \neq 1 \text{ e } x \neq 2, \\ 7 & \text{se } x = 1 \text{ o } x = 2. \end{cases}$$

Discutere la continuità di f e classificare le eventuali discontinuità.

Svolgimento.

Nei punti $x \neq 1, 2$ la funzione f è sicuramente continua.
Bisogna soltanto stabilire se risulti continua pure nei punti $x = 1$ e $x = 2$, entrambi di accumulazione per $\mathrm{dom} f$.

Cominciamo a studiare il punto $x = 1$.

Partiamo, ad esempio, dal limite sinistro, cioè

$$\lim_{x \to 1^-} \left[\sin\left(\frac{\pi}{x-1}\right) + \frac{7\arctan(x-2)}{(x-2)^2} \right],$$

nel quale compare la somma di due contributi. Calcoliamo separatamente i limiti dei due addendi.

Consideriamo il

$$\lim_{x \to 1^-} \sin\left(\frac{\pi}{x-1}\right).$$

Poiché $x \to 1^-$, si avrà $t = (x-1) \to 0^-$, da cui

$$y = \frac{\pi}{(x-1)} = \frac{\pi}{t} \ \to \ -\infty.$$

Poiché NON ESISTE il

$$\lim_{y \to -\infty} \sin y,$$

segue, dal teorema di sostuzione, che NON ESISTE il

$$\lim_{x \to 1^-} \sin\left(\frac{\pi}{x-1}\right) = \lim_{y \to -\infty} \sin(y).$$

Per il secondo addendo si ha, invece,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{7\arctan(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{7\arctan(-1)}{1} = -\frac{7}{4}\pi.$$

In definitiva, NON esiste il

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left[\sin\left(\frac{\pi}{x-1}\right) + \frac{7\arctan(x-2)}{(x-2)^2}\right],$$

poiché il primo addendo non ammette limite e il secondo addendo ammette limite *finito*.
Stesso discorso per il

$$\lim_{x\to 1^+} f(x).$$

Il punto $\boldsymbol{x = 1}$ è pertanto un punto di **discontinuità di seconda specie** per f.

Analizziamo ora il punto $x = 2$.

Si ha, per definizione di f,

$$f(2) = 7.$$

Calcoliamo ora il limite di f per $x \to 2$. Poiché

$$\lim_{y\to 0} \frac{\arctan y}{y} = 1,$$

ovvero

$$\arctan y \quad \sim \quad y \quad \text{per } y \to 0,$$

avremo, nel nostro caso, posto $y = (x-2) \to 0$ per $x \to 2$,

$$\arctan(x-2) \quad \sim \quad (x-2).$$

Dall'algebra dei limiti e dal teorema di sostituzione risulta

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left[\sin\left(\frac{\pi}{x-1}\right) + \frac{7\arctan(x-2)}{(x-2)^2}\right] = \lim_{x\to 2^-} \sin\left(\frac{\pi}{x-1}\right) + \lim_{x\to 2^-} \frac{7\cdot(x-2)}{(x-2)^2} =$$

$$= \sin(\pi) + \lim_{x\to 2^-} \frac{7}{x-2} = 0 + \lim_{x\to 2^-} \frac{7}{x-2}.$$

Poiché $x \to 2^-$, si avrà $(x-2) \to 0^-$, da cui $\dfrac{7}{x-2} \to -\infty$.
Ne segue che

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty.$$

Analogamente

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty.$$

Pertanto la funzione f presenta, in $\boldsymbol{x = 2}$, un **punto di infinito**.

5) Si dica per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2[(x-2)\pi] + \alpha & \text{se } x \le 3 \\ \dfrac{\sin(3-x)}{\log(x-2)} + e^{-\frac{1}{x-3}} & \text{se } x > 3 \end{cases}.$$

risulta continua in $\mathbb{R}$.

Svolgimento.

Il punto $x = 3$ è di accumulazione per il dominio di f. Cominciamo quindi col calcolare il limite destro di f per $x \to 3$, cioè

$$\lim_{x \to 3^+} \left[\frac{\sin(3-x)}{\log(x-2)} + e^{-\frac{1}{x-3}} \right].$$

Si tratta del limite della somma di due funzioni. Analizziamo il limite di ciascuna delle due funzioni.
Poiché $x \to 3^+$, si ha che

$$(x-3) \to 0^+ \quad \text{e} \quad (x-2) \to 1^+$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \to 3^+} \sin(x-3) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 3^+} \log(x-2) = 0,$$

da cui la forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$ per il

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{\sin(x-3)}{\log(x-2)}.$$

Il termine $\sin(x-3)$ è facilmente gestibile col teorema di sostituzione e con gli infinitesimi equivalenti dedotti dai limiti notevoli.
Poiché

$$\sin y \quad \sim \quad y \quad \text{per } y \to 0,$$

avremo, posto $y = (x-3) \to 0^+$ per $x \to 3^+$,

$$\sin(x-3) \quad \sim \quad (x-3) \quad \text{per } x \to 3^+$$

Consideriamo ora il termine $\log(x-2)$, il cui argomento, come si osservava, tende a 1. Poiché nell'approssimazione

$$\log(1+y) \quad \sim \quad y \;\; \text{per } y \to 0$$

l'argomento del log tende a 1 (come nel nostro caso), cerchiamo di riscrivere il termine $\log(x-2)$ nella forma

$$\log(1+y) \quad \text{con } y \to 0,$$

per poi applicare il teorema di sostituzione e individuare un infinitesimo equivalente di tipo polinomiale.
Si ha

$$\log(x-2) = \log(x-3+3-2) = \log[1+(x-3)]).$$

Poiché $x \to 3^+$, risulta $(x-3) \to 0^+$; pertanto abbiamo riscritto la funzione nella forma desiderata.
Si ha quindi

$$\log(x-2) = \log[1+(x-3)] \quad \sim \quad (x-3) \;\; \text{per} \;\; x \to 3^+.$$

In conclusione, sostituendo ad ogni infinitesimo il proprio infinitesimo equivalente, troviamo

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{\sin(x-3)}{\log(x-2)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{\sin(x-3)}{\log[1+(x-3)]} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1.$$

Consideriamo il secondo addendo della funzione,

$$\lim_{x\to 3^+} e^{-\frac{1}{x-3}}.$$

Poiché $(x-3) \to 0^+$, segue che

$$y = -\frac{1}{(x-3)} \to -\infty \quad \text{per } x \to 3^+.$$

Poiché

$$\lim_{y\to -\infty} e^y = 0,$$

segue, dal teorema di sostituzione, che

$$\lim_{x\to 3^+} e^{-\frac{1}{x-3}} = 0.$$

Concludendo troviamo

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \left[\frac{\sin(3-x)}{\log(x-2)} + e^{-\frac{1}{x-3}}\right] = 1 + 0 = 1.$$

D'altra parte si ha

$$f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \left\{\cos^2\left[(x-2)\pi\right] + \alpha\right\} = \cos^2 \pi + \alpha = (-1)^2 + \alpha = 1 + \alpha.$$

Affinché $\boldsymbol{f}$ risulti **continua** in $\boldsymbol{x = 3}$ si deve avere

$$-1 = 1 + \alpha,$$

da cui

$$\boldsymbol{\alpha = -2}.$$

Se, invece, $\boldsymbol{\alpha \neq -2}$, in $\boldsymbol{x = 3}$ si ha un **punto di salto**, in quanto i due limiti sono entrambi finiti ma di valore diverso.
In particolare, fissato $\alpha \neq -2$, il salto di f in $x_0 = 3$ vale

$$S = |-1-(1+\alpha)| = |-2-\alpha| = |2+\alpha|.$$

6) **[T.E. 26/11/2007]**
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-6)}{(x-6)} + \dfrac{[1+(x-7)^2]^{1/(x-7)^2}}{x-7} & \text{se } x \neq 7, \quad x \neq 6, \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } x = 7 \text{ o } x = 6. \end{cases}$$

Determinare e classificare eventuali punti di discontinuità per f.

Svolgimento.

Cominciamo col punto $x = 6$.
Si ha, in base alla definizione di f,

$$f(6) = \frac{1}{2}.$$

Essendo il punto $x = 6$ di accumulaizone per dom$f$, dobbiamo ora valutare i limiti destro e sinistro di f in $x = 6$.
In realtà, tali limiti risultano coincidenti.

Poiché

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1,$$

posto $y=(x-6)\to 0$ per $x\to 6$, segue, dal teorema di sostituzione e dai teoremi sui limiti che

$$\lim_{x\to 6} f(x)=\lim_{x\to 6}\left\{\frac{\sin(x-6)}{(x-6)}+\frac{\left[1+(x-7)^2\right]^{1/(x-7)^2}}{x-7}\right\}=$$

$$=\left[1+\frac{(1+(-1)^2)^{1/(-1)^2}}{-1}\right]=$$

$$=[1-2]=-1.$$

Pertanto, in $\boldsymbol{x=6}$ la funzione f presenta un punto di **discontinuità eliminabile** (in quanto limite destro e sinistro coincidono e sono finiti ma sono diversi dal valore che f assume in $x=6$).

Consideriamo ora il punto $x=7$, di accumulazione per il dominio di f.

Anche in questo caso risulta

$$f(7)=\frac{1}{2}.$$

Valutiamo quindi il limite

$$\lim_{x\to 7}\left[\frac{\sin(x-6)}{(x-6)}+\frac{\left[1+(x-7)^2\right]^{1/(x-7)^2}}{x-7}\right].$$

Si ha banalmente, dalla continuità della funzione sin e dal teorema sul limite di un quoziente,

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sin(x-6)}{(x-6)}=\sin 1.$$

Calcoliamo il limite del secondo addendo:

$$\lim_{x\to 7}\frac{\left[1+(x-7)^2\right]^{1/(x-7)^2}}{x-7}.$$

Passando al limite, ci accorgiamo che il numeratore si presenta nella forma indeterminata $[1^\infty]$ e il denominatore tende a 0.

Sappiamo già che la forma indeterminata $[1^\infty]$ suggerisce di far riferimento al limite notevole

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

Effettivamente, nel nostro caso, il limite è proprio della forma precedente, essendo

$$y = (x-7)^2 \to 0.$$

Dal teorema di sostituzione si ha quindi

$$\lim_{x\to 7}\left[1+(x-7)^2\right]^{1/(x-7)^2} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = e.$$

Di conseguenza si trova immediatamente

$$\lim_{x\to 7^-}\frac{[1+(x-7)^2]^{1/(x-7)^2}}{x-7} = -\infty,$$

poiché il numeratore tende a e mentre il denominatore tende a 0^-.
Analogamente

$$\lim_{x\to 7^+}\frac{[1+(x-7)^2]^{1/(x-7)^2}}{x-7} = +\infty.$$

Quindi, per il teorema sul limite di una somma di funzioni, si ha

$$\lim_{x\to 7^-}\left[\frac{\sin(x-6)}{(x-6)} + \frac{[1+(x-7)^2]^{1/(x-7)^2}}{x-7}\right] = [\sin(1)-\infty] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 7^+}\left[\frac{\sin(x-6)}{(x-6)} + \frac{[1+(x-7)^2]^{1/(x-7)^2}}{x-7}\right] = [\sin(1)+\infty] = +\infty$$

Pertanto, la funzione f è discontinua in $\boldsymbol{x=7}$ e $\boldsymbol{x=7}$ è un **punto di infinito** (infatti, entrambi i limiti esistono e almeno uno di essi è infinito.).

7) **[T.E. 29/06/2009]**

Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} |x-1|^\gamma \left[\sin\dfrac{1}{x-1}+2\right] & \text{se } x\neq 1, \\ 0 & \text{se } x=1. \end{cases}$$

Studiare al variare di $\gamma\in\mathbb{R}$ la continuità della funzione f in tutto $\mathbb{R}$, classificando eventuali punti di discontinuità.

Svolgimento.

Osserviamo che la funzione f è definita su tutto l'asse reale: infatti, l'unico problema per la funzione che compare nella prima riga è $x = 1$ (in cui non è definita); la funzione assegnata, tuttavia, è definita pure in $x = 1$ e in tale punto assume il valore 0.
La nostra discussione ruoterà attorno al punto $x = 1$, di accumulazione per dom$f$: dobbiamo stabilire per quali valori del parametro reale γ (se ce ne sono) la funzione f sia continua in $x = 1$ e, per i rimanenti valori di γ, calssificare eventuali discontinuità.

Per $x \neq 1$, invece, la funzione è sicuramente continua perché composizione, somma, quoziente e prodotto di funzioni ivi continue.
Calcoliamo quindi il limite

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} |x-1|^\gamma \left[\sin\frac{1}{x-1} + 2\right].$$

Cominciamo col provare che il fattore in parentesi quadra non ammette limite.
Poiché non esiste il

$$\lim_{y\to\pm\infty} \sin y,$$

e osservato che,

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} = \pm\infty,$$

risulta, posto $y = \dfrac{1}{x-1}$, che non esiste

$$\lim_{x\to 1} \sin\frac{1}{x-1} = \lim_{y} \sin y.$$

Ne segue che non esiste neppure il

$$\lim_{x\to 1} \left[\sin\frac{1}{x-1} + 2\right],$$

poiché al termine che non ammette limite è sommato un termine che ammette limite finito. Non si è quindi in grado di stabilire il valore della somma.

Tuttavia, possiamo affermare con certezza che la parentesi quadra, pur non ammettendo limite per $x \to 1$, sia una quantità LIMITATA, in particolare una quantità appartenente all'intervallo

$$[1, 3],$$

visto che il valore minimo che può assumere la funzione sin è -1, mentre il valore massimo è $+1$.

Rimane da analizzare il fattore $|x-1|^\gamma$ per $x \to 1$.

Conviene studiare subito il caso $\gamma = 0$: poiché $x \neq 1$, quindi $(x-1) \neq 0$, si ha

$$|x-1|^\gamma = |x-1|^0 = 1;$$

pertanto la funzione f diviene

$$f(x) = \begin{cases} \left[\sin \dfrac{1}{x-1} + 2\right] & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Di conseguenza, si trova

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \left[\sin \frac{1}{x-1} + 2\right];$$

per quanto osservato in precedenza, tale limite non esiste.

Ne segue che per $\boldsymbol{\gamma = 0}$, la funzione f presenta in $\boldsymbol{x = 1}$ una **discontinuità di seconda specie**.

Sia ora $\gamma \neq 0$: la funzione f assume la forma originaria

$$f(x) = \begin{cases} |x-1|^\gamma \left[\sin \dfrac{1}{x-1} + 2\right] & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}.$$

È noto che

$$\lim_{y\to 0^+} y^\gamma = \begin{cases} 0 & \text{se } \gamma > 0 \\ +\infty & \text{se } \gamma < 0 \end{cases}.$$

Posto $y = |x-1|$ si ha che $y \to 0^+$ quando $x \to 1$. Dal teorema di sostituzione si trova quindi

$$\lim_{x\to 1} |x-1|^\gamma = \lim_{y\to 0^+} y^\gamma = \begin{cases} 0 & \text{se } \gamma > 0 \\ +\infty & \text{se } \gamma < 0 \end{cases}.$$

Pertanto:

- se $\boldsymbol{\gamma > 0}$, risulta

  $$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} |x-1|^\gamma \left[\sin \frac{1}{x-1} + 2\right] = \lim_{x\to 1} |x-1|^\gamma \cdot \lim_{x\to 1} \left[\sin \frac{1}{x-1} + 2\right] = 0,$$

  in quanto si tratta del prodotto di una funzione infinitesima per una funzione limitata.

  In particolare, essendo i due limiti (sinistro e destro) coincidenti e uguali al valore di f in $x = 1$, la funzione risulta **continua** in $x = 1$ per $\gamma > 0$;

- se $\gamma < 0$, risulta

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} |x-1|^\gamma \left[\sin\frac{1}{x-1}+2\right] = \lim_{x\to 1} |x-1|^\gamma \cdot \lim_{x\to 1}\left[\sin\frac{1}{x-1}+2\right] = +\infty,$$

  in quanto si ha il prodotto tra $+\infty$ e una quantità limitata il cui segno è sicuramente positivo (ricordiamo infatti che la parentesi quadra non ammette limite per $x \to 1$ ma è senza dubbio una quantità limitata tra 1 e 3).

  Pertanto, per $\boldsymbol{\gamma < 0}$, la funzione possiede in $x = 1$ un **punto di infinito**.

Riepilogando si hanno i seguenti casi:

- se $\gamma < 0$, $x = 1$ è un punto di infinito per f;
- se $\gamma = 0$, $x = 1$ è un punto di discontinuità di seconda specie per f;
- se $\gamma > 0$, f è continua in $x = 1$.

8) **[T.E. 29/01/2010]**
Siano $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\sin|x-1|)^\alpha}{7\log x} & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Discutere la continuità di f in $x = 1$ al variare di α e classificare eventuali discontinuità.

Svolgimento.

La funzione f è definita per $x > 0$; non viene chiesto di studiare la continuità di f in un intorno destro di 0; infatti, la funzione non è definita in $x = 0$.

La funzione f è invece definita in $x = 1$ ed $x = 1$ risulta di accumulazione per il dom$f$.
Si ha, in base alla definizione di f,

$$f(1) = 0.$$

Per rendere il calcolo dei due limiti il più agile possibile, liberiamoci del valore assoluto.
Studiando il segno del valore assoluto si ha immediatamente

$$|x-1| = \begin{cases} 1-x & \text{se } x < 1 \\ x-1 & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

Quindi la funzione f si può riscrivere come

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\sin(1-x))^{\alpha}}{7\log x} & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{(\sin(x-1))^{\alpha}}{7\log x} & \text{se } x > 1 \end{cases} .$$

Cominciamo a calcolare, al variare di $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{(\sin(1-x))^{\alpha}}{7\log x}.$$

Poiché $(1-x) \to 0^+$ per $x \to 1^-$, si ha che

$$\sin(1-x) \quad \to 0^+ \quad \text{per } x \to 1^-;$$

essendo poi $\alpha > 0$ segue che

$$(\sin(1-x))^{\alpha} \to 0^+ \quad \text{per } x \to 1^-$$

Il denominatore tende a

$$\log(1) = 0.$$

Il limite si presenta quindi nella forma indeterminata

$$\left[\frac{0}{0}\right],$$

che cercheremo di risolvere applicando i limiti notevoli e le loro conseguenze.
Per quanto riguarda il numeratore, nel quale compare la funzione sin il cui argomento tende a 0, utilizzeremo il limite notevole

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

e la conseguente approssimazione

$$\sin y \quad \sim \quad y \quad \text{per } y \to 0.$$

In particolare, posto $y = (1-x)$, avremo

$$\sin(1-x) \quad \sim \quad (1-x) \quad \text{per } x \to 1^-.$$

Il fattore $\log x$, invece, avendo argomento tendente a 1 lo ricondurremo all'approssimazione

$$\log(1+y) \quad \sim \quad y \quad \text{per } y \to 0.$$

Si ha infatti

$$\log x \quad = \quad \log(x+1-1) = \log[1+(x-1)] \quad \text{ con } y = (x-1) \to 0.$$

Ne segue che

$$\log x \quad = \quad \log[1+(x-1)] \ \sim \ (x-1) \quad \text{ per } x \to 1^-.$$

Possiamo ora calcolare il limite di f per $x \to 1^-$ sostituendo le funzioni infinitesime coi loro infinitesimi equivalenti ricavati dai limiti notevoli.
Si ha

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(\sin(1-x))^\alpha}{7\log x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1-x)^\alpha}{7\cdot(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{(1-x)^\alpha}{-7\cdot(1-x)} = \lim_{x\to 1^-} -\frac{1}{7}\frac{(1-x)^\alpha}{(1-x))}.$$

Dobbiamo quindi stabilire, al variare di $\alpha > 0$, il valore del limite

$$\lim_{x\to 1^-} -\frac{1}{7}\frac{(1-x)^\alpha}{(1-x))}.$$

- Se $\alpha = 1$, ancor prima di passare al limite si ha

$$\frac{(1-x)^\alpha}{-7(1-x)} = \frac{(1-x)^1}{-7(1-x)} = -\frac{1}{7},$$

  da cui

$$\lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{1}{7}\right) = -\frac{1}{7}.$$

- Se $\alpha > 1$, posto $y = (1-x) \to 0^+$, si trova

$$\lim_{y\to 0^+} -\frac{1}{7}\cdot\frac{y^\alpha}{y} = 0,$$

  poiché y^α è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a y quando $y \to 0^+$.

- Se $\alpha < 1$, invece, posto $y = (1 - x)$, risulta che $\dfrac{y^\alpha}{y} \to +\infty$ in quanto y è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad y^α; ne segue che

$$\lim_{y \to 0^+} -\frac{1}{7} \cdot \frac{y^\alpha}{y} = -\frac{1}{7} \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Riepilogando, si ha

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ -\dfrac{1}{7} & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha > 1 \end{cases} .$$

Studiamo ora il limite

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(\sin(x-1))^\alpha}{7 \log x}.$$

Seguendo gli stessi ragionamenti del caso precedente, avremo

$$(\sin(x-1))^\alpha \quad \sim \quad (x-1)^\alpha, \qquad \log x \quad \sim \quad (x-1) \quad \text{per } x \to 1^+.$$

Pertanto

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(\sin(x-1))^\alpha}{7 \log x} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)^\alpha}{7 \cdot (x-1)}.$$

Discutendo come prima si ha

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{7} & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha > 1 \end{cases} .$$

In definitiva, confrontando limite destro e sinistro di f in $x = 1$ e il valore $f(1)$, si hanno i seguenti casi:

- se $0 < \alpha < 1$, la funzione presenta in $x = 1$ un punto di infinito;
- se $\alpha = 1$ la funzione ha in $x = 1$ una discontinuità di tipo salto: infatti il limite sinistro vale $-\dfrac{1}{7}$ mentre il limite destro vale $+\dfrac{1}{7}$. Il salto è

$$S = \left| \frac{1}{7} - \left(-\frac{1}{7} \right) \right| = \frac{2}{7};$$

- se $\alpha > 1$, la funzione è continua in $x = 1$. Infatti

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0 = f(1).$$