ESERCIZI SUI PUNTI DI NON DERIVABILITÀ TRATTI DA TEMI D'ESAME

a cura di Michele Scaglia

FUNZIONI DERIVABILI

Sia $f : \text{dom}f \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in \text{dom}f$ di accumulazione per $\text{dom}f$.
Chiamiamo **derivata prima di f** in x_0 il valore (finito o infinito) del limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

o, equivalentemente, effettuando il cambiamento di variabile $x - x_0 = h$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Il valore del precedente limite viene denotato con uno dei simboli

$$f'(x_0) \quad , \quad y'(x_0), \quad Df(x_0).$$

La funzione f si dice **derivabile in x_0** se il precedente **limite esiste finito**.

Ciò significa che devono esistere finiti e coincidere i limiti

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Ricordiamo che i precedenti limiti vengono detti rispettivamente **derivata sinistra** e **derivata destra** di f in x_0 e indicati con i simboli

$$f'_-(x_0), \quad f'_+(x_0).$$

Quindi, riepilogando, diciamo che f è derivabile in x_0 se e solo se

$$\exists f'_-(x_0) \neq \infty, \ \ \exists f'_+(x_0) \neq \infty \ \text{ e } \ f'_-(x_0) = f'_+(x_0). \tag{1}$$

Una funzione $f : \text{dom}f \to \mathbb{R}$ per cui in $x_0 \in \text{dom}f$ non valga la condizione (1) si dice **non**

derivabile in x_0 e il punto x_0 si dice **punto di non derivabilità** per f.

A seconda del tipo di negazione della (1) si hanno tre tipi di punti di non derivabilità.

PUNTO ANGOLOSO

Diciamo che x_0 è un **punto angoloso** per f se esitono e sono diverse derivata destra e derivata sinistra di f in x_0 e almeno una delle due è finita.

PUNTO DI CUSPIDE

Diciamo che x_0 è un punto di **cuspide** per f se derivata destra e derivata sinistra di f in x_0 valgono ∞ e sono di segno discorde.
Cioè

$$f'_-(x_0) = +\infty \quad \text{e} \quad f'_+(x_0) = -\infty, \qquad \text{oppure} \qquad f'_-(x_0) = -\infty \quad \text{e} \quad f'_+(x_0) = +\infty.$$

PUNTO A TANGENTE VERTICALE

Diciamo che x_0 è un punto **a tangente verticale** per f se la derivata destra e la derivata sinistra di f in x_0 valgono entrambe ∞ e sono di segno concorde.
Cioè

$$f'_-(x_0) = +\infty \quad \text{e} \quad f'_+(x_0) = +\infty, \qquad \text{oppure} \qquad f'_-(x_0) = -\infty \quad \text{e} \quad f'_+(x_0) = -\infty.$$

Ricordiamo anche l'importante teorema che collega continuità e derivabilità di una funzione f in un punto x_0.

TEOREMA

Se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0.
In formule:

$$f \text{ derivabile in } x_0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ continua in } x_0.$$

Non vale il viceversa.
Cioè, una funzione continua in un punto x_0 non è detto che sia derivabile in x_0.
In formule

$$f \text{ continua in } x_0 \quad \not\Longrightarrow \quad f \text{ derivabile in } x_0$$

Si pensi ad esempio ai punti di non derivabilità appena classificati. Un punto angoloso per f è un punto in cui la funzione è continua ma non è derivabile (essendo diverse derivata destra e sinistra).

In base alla definizione data, per verificare se una funzione è derivabile in un punto x_0, è necessario calcolarsi $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$, vale a dire calcolarsi due limiti.

In realtà, in molti contesti, si può evitare di procedere con il calcolo dei due limiti del rapporto incrementale.
Vale infatti il seguente teorema:

TEOREMA (del limite della derivata)

Sia $f : \text{dom} f \to \mathbb{R}$ una funzione definita e continua in $I(x_0)$ e derivabile in $I(x_0)$ tranne eventualmente in x_0.

Se esiste (finito o infinito) il limite

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$

allora esiste anche la derivata sinistra $f'_-(x_0)$ di f in x_0 e si ha

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x).$$

Analogamente, se esiste (finito o infinito) il limite

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

allora esiste anche la derivata destra $f'_+(x_0)$ di f in x_0 e si ha

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x).$$

Questo teorema di consente di ricondurre il calcolo della derivata sinistra e destra al calcolo del limite della derivata prima di f (calcolata con le usuali regole di derivazione) per $x \to x_0^-$ o x_0^+, a patto che tali limiti esistano.
Nel caso in cui, ad esempio, non esista

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x),$$

non si può concudere nulla circa il valore della derivata destra di f in x_0: per il suo calcolo bisogna procedere utilizzando la definizione (vale a dire, facendo il limite destro del rapporto incrementale).
Stesso discorso per la derivata sinistra.

ESERCIZI SVOLTI

1) **[T.E. 03/04/2007]**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\alpha x)}{8x} & \text{se } x < 0, \\ (\beta - 1)\sqrt{x} + \cos x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Dire per quali valori di α e β la funzione f è continua e derivabile in $x = 0$. Negli altri casi classificare il tipo di discontinuità e di non derivabilità in $x = 0$.

Svolgimento.

Cominciamo a studiare la continuità di f in $x = 0$ (condizione necessaria per poter sperare nella derivabilità).

La funzione f è continua in $x = 0$ se e solo se

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

Consideriamo il limite destro (che, vista la definizione di f, coincide con $f(0)$). Dalla continuità delle funzioni $\sqrt{x}$ e $\cos x$ si ha

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left[(\beta - 1)\sqrt{x} + \cos x\right] = (\beta - 1)\sqrt{0} + \cos 0 = 1.$$

Per quanto riguarda il limite sinistro di f in 0, conviene anzitutto studiare il caso in cui $\alpha = 0$. Per $\alpha = 0$, si ha, per ogni $x < 0$,

$$f(x) = \frac{\sin(0x)}{8x} = 0,$$

da cui, banalmente,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0.$$

Ne segue che per $\alpha = 0$ la funzione f è discontinua in $x = 0$ in quanto

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

e presenta un punto di salto con

$$S = |0 - 1| = 1.$$

Non essendo continua, f non può essere derivabile in $x = 0$ quando $\alpha = 0$.

Se, invece, $\alpha \neq 0$, ricordando il limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

dal quale

$$\sin t \quad \sim \quad t \quad \text{per } t \to 0,$$

risulta, per il teorema di sostituzione con $t = \alpha x \to 0$,

$$\sin(\alpha \cdot x) \quad \sim \quad \alpha \cdot x \quad \text{per } x \to 0.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(\alpha x)}{8x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\alpha \cdot x}{8x} = \frac{\alpha}{8}.$$

Se $\alpha \neq 0$, la funzione f risulta continua in $x = 0$ se e solo se

$$\frac{\alpha}{8} = 1,$$

da cui

$$\alpha = 8.$$

Pertanto, per $\alpha = 8$ la funzione f è continua in $x = 0$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ (infatti, il parametro β non è mai intervenuto nello studio della continuità di f).
Tale funzione potrebbe essere derivabile in $x = 0$, come potrebbe non esserlo. Sappiamo infatti che la continuità in un punto non è sufficiente a garantire la derivabilità in quel punto.

Calcoliamo quindi la derivata prima della funzione continua

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(8x)}{8x} & \text{se } x < 0, \\ (\beta - 1)\sqrt{x} + \cos x & \text{se } x \geq 0 \end{cases},$$

utilizzando le usuali regole di derivazione.

Calcoliamo separatamente i vari contributi.

Partiamo dalla derivata di

$$\frac{\sin(8x)}{8x} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin(8x)}{x}.$$

Risulta

$$\left(\frac{1}{8} \cdot \frac{\sin(8x)}{x}\right)' = \frac{1}{8} \cdot \frac{\cos(8x) \cdot 8 \cdot x - \sin(8x) \cdot 1}{x^2} = \frac{8x\cos(8x) - \sin 8x}{8x^2}.$$

Per quanto riguarda

$$(\beta-1)\sqrt{x}+\cos x,$$

si ha

$$\big((\beta-1)\sqrt{x}+\cos x\big)'=(\beta-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sin x.$$

Pertanto risulta

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{8x\cos(8x)-\sin(8x)}{8x^2} & \text{se } x<0\\ (\beta-1)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\sin x & \text{se } x>0\end{cases}.$$

Come già richiamato precedentemente, possiamo dire (grazie al teorema del limite della derivata) che f è derivabile in $x=0$ se e solo se

$$\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}f'(x)\neq\infty$$

(a patto che tali limiti esistano. Nel caso in cui non esistessero, bisognerebbe procedere, come da definizione, con il calcolo dei limiti sinistro e destro del rapporto incrementale).
Dobbiamo quindi fare in modo che

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{8x\cos(8x)-\sin(8x)}{8x^2}=\lim_{x\to 0^+}\left\{(\beta-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sin x\right\}$$

e che il valore comune dei precedenti limiti sia finito.
Studiamo

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{8x\cos(8x)-\sin(8x)}{8x^2}.$$

Tale limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Cerchiamo di risolverlo con la regola di De L'Hopital.

Si ha

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{8x\cos(8x)-\sin(8x)}{8x^2}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{8\cdot\cos(8x)-8x\sin(8x)\cdot 8-\cos(8x)\cdot 8}{16x}=$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-64x\sin(8x)}{2\cdot 8x}=\lim_{x\to 0^-}-32x=0$$

(si è usato il limite notevole $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$, combinato col teorema di sostituzione).

Esistendo il limite sinistro della derivata prima, esiste anche la derivata sinistra, in particolare si ha

$$f'_-(0) = 0.$$

Calcoliamo ora il limite destro, vale a dire

$$\lim_{x\to 0^+} \left\{ (\beta - 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x \right\}.$$

Cominciamo con l'osservare che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \sin x = 0.$$

Pertanto, se

$$\beta - 1 = 0,$$

ossia se

$$\beta = 1,$$

scompare l'addendo che tende all'infinito, da cui

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = f'_+(0) = 0,$$

e di conseguenza la funzione f è derivabile in $x = 0$ (in quanto derivata sinistra e destra di f in 0 coincidono e sono entrambe finite).
Se invece $\beta \neq 1$,

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \pm\infty - 0 = \pm\infty,$$

dove il segno dell'infinito è $+$ se $\beta > 1$ e $-$ se $\beta < 1$.

In ogni caso, se $\beta \neq 1$, nel punto $x = 0$ si ha un punto angoloso, in quanto

$$f'_-(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \infty.$$

Riepilogando

- se $\alpha \neq 8$, f non è continua in $x = 0$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$; quindi non può essere derivabile in $x = 0$;
- se $\alpha = 8$ e $\beta = 1$, f è continua e derivabile in $x = 0$;

- se $\alpha = 8$ e $\beta \neq 1$, f è continua in $x = 0$ ma non è derivabile in $x = 0$ e presenta un **punto angoloso**.

2) **[T.E. 10/09/2007]**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt[3]{(\log|x|)^2} & \text{se } x \neq 0, \\ \alpha - 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f sia continua e derivabile in $x = 0$. Negli altri casi classificare il tipo di discontinuità e di non derivabilità in $x = 0$.

Svolgimento.

Cominciamo a studiare la continuità di f in $x = 0$.

f è continua in $x = 0$ se e solo se

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = f(0).$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \lim_{x\to 0^\pm} x\sqrt[3]{(\log|x|)^2} = \lim_{x\to 0^\pm} x\,(\log|x|)^{2/3} = 0,$$

trattandosi di un caso particolare del limite notevole

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha (\log x)^\beta = 0, \quad \text{per ogni} \quad \alpha, \beta > 0.$$

Inoltre

$$f(0) = \alpha - 1.$$

Quindi, f è continua in $x = 0$ se e solo se

$$\alpha - 1 = 0,$$

ossia se e solo se

$$\alpha = 1.$$

Se $\alpha \neq 1$, la funzione f presenta in $x = 0$ una discontinuità eliminabile (in quanto limite sinistro e destro valgono entrambi 0, a differenza della $f(0)$, che vale invece $(\alpha - 1) \neq 0$).

Perché abbia senso studiare la derivabilità in $x = 0$, è anzitutto necessario riscrivere la funzione f con $\alpha = 1$, ossia riscrivere continua la funzione f:

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt[3]{(\log|x|)^2} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Diamo due possibili modi di svolgimento dell'esercizio (il primo metodo ricorre al teorema del limite della derivata; il secondo, invece, utilizza la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale).

Primo modo.

Controlliamo se f è derivabile o meno in $x = 0$ utilizzando il teorema del limite della derivata.

Dovendo calcolare la derivata possiamo liberarci del valore assoluto, studiandone il segno dell'argomento.
Poiché

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

possiamo riscrivere la funzione f come

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt[3]{(\log(-x))^2} & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x\sqrt[3]{(\log(x))^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Calcoliamone la derivata prima utilizzando le usuali regole.
Consideriamo ad esempio

$$x\sqrt[3]{(\log(-x))^2} = x \cdot (\log(-x))^{2/3}.$$

Risulta

$$\left(x \cdot (\log(-x))^{2/3}\right)' = 1 \cdot (\log(-x))^{2/3} + x \cdot \frac{2}{3}(\log(-x))^{-1/3} \cdot \frac{1}{-x} \cdot (-1) =$$

$$= (\log(-x))^{2/3} + \frac{2x}{3x \cdot (\log(-x))^{1/3}} = (\log(-x))^{2/3} + \frac{2}{3 \cdot (\log(-x))^{1/3}} =$$

$$= \sqrt[3]{(\log(-x))^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{\log(-x)}}.$$

In maniera analoga, si trova

$$\left(x \cdot (\log(x))^{2/3}\right)' = \sqrt[3]{(\log(x))^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{\log(x)}}.$$

Pertanto si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(\log(-x))^2} + \dfrac{2}{3\sqrt[3]{\log(-x)}} & \text{se } x < 0 \\ \\ \sqrt[3]{(\log(x))^2} + \dfrac{2}{3\sqrt[3]{\log(x)}} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Calcoliamo, se esistono, limite sinistro e destro della derivata prima.

Operiamo, in sequenza, le seguenti sostituzioni:

$$y = -x, \quad t = \log y,$$

da cui

$$y \to 0^+ \ , \quad t \to -\infty \quad \text{per } x \to 0^-$$

Risulta, dai teoremi sui limiti,

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \left\{ \sqrt[3]{(\log(-x))^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{\log(-x)}} \right\} =$$

$$= \lim_{y \to 0^+} \left\{ \sqrt[3]{(\log y)^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{\log y}} \right\} = \lim_{t \to -\infty} \left\{ \sqrt[3]{(t)^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{t}} \right\} = +\infty + 0^- = +\infty.$$

Pertanto, esistendo il limite sinistro della derivata, esiste anche la derivata sinistra e si ha

$$f'_-(0) = +\infty.$$

Calcoliamo ora il limite destro.
Risulta, come nel caso precedente,

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \left\{ \sqrt[3]{(\log(x))^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{\log(x)}} \right\} = +\infty.$$

Pertanto

$$f'_+(0) = +\infty.$$

Poiché

$$f'_-(0) = +\infty = f'_+(0),$$

ne segue che in $x = 0$ la funzione f non è derivabile e presenta un **punto a tangente verticale**.

In definitiva:

- se $\alpha \neq 1$, f non è continua né derivabile in $x = 0$; in particolare in $x = 0$ vi è una discontinuità eliminabile.

- se $\alpha = 1$, f è continua in $x = 0$ ma non è derivabile e presenta un punto a tangente verticale.

Secondo modo.

Considerata per $\alpha = 1$ la funzione continua

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt[3]{(\log|x|)^2} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

studiamone la derivabilità in $x = 0$ applicando la definizione (vale a dire, calcolando il limite del rapporto incrementale per $x \to 0^-$ e per $x \to 0^+$).
Cominciamo a calcolare la derivata sinistra.
Si ha

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Risulta (ricordando che $x \neq 0$)

$$f(x) = x\sqrt[3]{(\log|x|)^2}$$

e, in base alla definizione di f,

$$f(0) = 0.$$

Quindi la derivata sinistra è data dal valore del limite

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x\sqrt[3]{(\log|x|)^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x\sqrt[3]{(\log|x|)^2}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \sqrt[3]{(\log|x|)^2}.$$

Poiché $x \to 0^-$, si ha $y = |x| \to 0^+$; essendo poi

$$\lim_{y \to 0^+} \log y = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \to -\infty} \sqrt[3]{t^2} = +\infty$$

e posto $t = \log y = \log|x|$, si ha, per il teorema di sostituzione,

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \sqrt[3]{(\log|x|)^2} = \lim_{t \to -\infty} \sqrt[3]{t^2} = +\infty.$$

Cioè

$$f'_-(0) = +\infty.$$

Analogamente,

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{(\log|x|)^2} = +\infty.$$

Poiché

$$f'_{-}(0) = +\infty = f'_{+}(0),$$

si ha che, per $\alpha = 1$, la funzione f non è derivabile in $x = 0$ e presenta un punto a tangente verticale.

Abbiamo ottenuto, con molti meno calcoli, lo stesso risultato a cui siamo giunti utilizzando il teorema del limite della derivata.

Questo esercizio vuole sottolineare come sia importante valutare se il calcolo delle derivate destra e sinistra non risulti più comodo attraverso la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale piuttosto che attraverso il teorema del limite della derivata.

3) **[T.E. 06/09/2010]**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+7x)}{x} + x^{4/5} & \text{se } x \neq 0, \\ \alpha & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $x = 0$. Negli altri casi classificare il tipo di discontinuità. Nel caso in cui f sia continua, dire se è derivabile o meno in $x = 0$ e, in caso negativo, classificare il tipo di non derivabilità.

Svolgimento.

Cominciamo con lo studio della continuità.

Studiamo il

$$\lim_{x\to 0} f(x).$$

Ricordando il limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1,$$

da cui

$$\log(1+t) \quad \sim \quad t \quad \text{per } t \to 0,$$

si ha, posto $t = 7x \to 0$,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left\{ \frac{\log(1+7x)}{x} + x^{4/5} \right\} = \lim_{x\to 0} \left\{ \frac{7x}{x} + x^{4/5} \right\} = 7 + 0 = 7.$$

Quindi, essendo

$$f(0) = \alpha,$$

si ha che f è continua in $x = 0$ se e solo se

$$\alpha = 7.$$

Se $\alpha \neq 7$, la funzione f presenta, in $x = 0$, una discontinuità eliminabile.

Poniamo ora $\alpha = 7$, dando luogo alla funzione continua

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+7x)}{x} + x^{4/5} & \text{se } x \neq 0, \\ 7 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Studiamone la derivabilità.

Calcoliamo la derivata prima. Si ha

$$\left(\frac{\log(1+7x)}{x} + x^{4/5}\right)' = \frac{\dfrac{1}{1+7x} \cdot 7 \cdot x - \log(1+7x) \cdot 1}{x^2} + \frac{4}{5} x^{-1/5} =$$

$$= \frac{\dfrac{7x}{1+7x} - \log(1+7x)}{x^2} + \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}.$$

Calcoliamo

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \left\{ \frac{\dfrac{7x}{1+7x} - \log(1+7x)}{x^2} + \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} \right\}.$$

Sappiamo, dalla teoria, che il limite della somma di due funzioni è pari alla somma dei limiti delle due funzioni, a patto che non si generino forme indeterminate.
Cominciamo quindi col calcolare il limite, per $x \to 0^-$, del primo addendo:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\dfrac{7x}{1+7x} - \log(1+7x)}{x^2},$$

che si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$.
Applichiamo il teorema di De L'Hopital.
Si ha

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\dfrac{7x}{1+7x} - \log(1+7x)}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{\dfrac{7(1+7x) - 49x}{(1+7x)^2} - \dfrac{7}{(1+7x)}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\dfrac{7}{(1+7x)^2} - \dfrac{7}{(1+7x)}}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\dfrac{-49x}{(1+7x)^2}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-49}{2(1+7x)^2} = -\frac{49}{2}.$$

Per quanto riguarda il secondo addendo, invece, si ha direttamente

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \left[\frac{\dfrac{7x}{1+7x} - \log(1+7x)}{x^2} + \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} \right] = -\frac{49}{2} - \infty = -\infty.$$

In maniera analoga si trova

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \left[\frac{\dfrac{7x}{1+7x} - \log(1+7x)}{x^2} + \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} \right] = -\frac{49}{2} + \infty = +\infty.$$

Quindi

$$f'_-(0) = -\infty, \qquad f'_+(0) = +\infty.$$

Ne segue che la funzione f non è derivabile in $x = 0$ e presenta un punto di cuspide.

Riepilogando:

- se $\alpha \neq 7$ la funzione f non è continua, quindi neanche derivabile in $x = 0$. In particolare in $x = 0$ presenta una discontinuità eliminabile.

- se $\alpha = 7$, la funzione f è continua in $x = 7$ ma non è derivabile e presenta un punto di cuspide.

4) **[T.E. 18/03/2008]**

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la seguente funzione:

$$g(x) = \begin{cases} 3|x| + 1 + x \log |x| & \text{se } x \neq 0, \\ \alpha & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione g è continua in $x = 0$ ed altrimenti classificarne il tipo di discontinuità. Determinare per quali valori di α la funzione g è derivabile o meno in $x = 0$ ed altrimenti classificarne il tipo di non derivabilità.

Svolgimento.

Per studiare la continuità di f in $x = 0$, dobbiamo considerare il limite

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \{3|x| + 1 + x \log |x|\} .$$

Ricordando il limite notevole

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha (\log x)^\beta = 0, \quad \text{per ogni } \ \alpha, \beta > 0,$$

si ha facilmente

$$\lim_{x \to 0} \{3|x| + 1 + x \log |x|\} = 1.$$

Quindi, f è continua in $x = 0$ se e solo se

$$\alpha = 1.$$

Se $\alpha \neq 1$, la funzione f presenta in $x = 0$ una discontinuità eliminabile.

Posto $\alpha = 1$, studiamo la derivabilità della funzione continua

$$g(x) = \begin{cases} 3|x| + 1 + x \log |x| & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

Per il calcolo della derivata, in questo caso, procediamo tenendo il valore assoluto (potremmo, indifferentemente, procedere come nell'esercizio 2 liberandoci del valore assoluto. Decidiamo invece di tenere il valore assoluto per mostrare un altro modo di soluzione).
Ricordando che

$$(|x|)' = \frac{x}{|x|},$$

si ha, nel nostro caso,

$$g'(x) = 3\frac{x}{|x|} + 0 + 1 \cdot \log(|x|) + x \cdot \frac{1}{|x|} \cdot \frac{x}{|x|} = 3\frac{x}{|x|} + \log(|x|) + \frac{x^2}{|x|^2} =$$

$$= 3\frac{x}{|x|} + \log(|x|) + \frac{x^2}{x^2} = 3\frac{x}{|x|} + \log(|x|) + 1 \quad \text{se } x \neq 0.$$

Pertanto

$$g'(x) = \begin{cases} -3 + \log(-x) + 1 & \text{se } x < 0 \\ 3 + \log(x) + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases},$$

cioè

$$g'(x) = \begin{cases} -2 + \log(-x) & \text{se } x < 0 \\ 4 + \log(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Studiamo a questo punto il limite sinistro e destro di $f'(x)$ in $x = 0$.
Si ha, posto $y = -x \to 0^+$,

$$\lim_{x\to 0^-} g'(x) = \lim_{x\to 0^-} \{-2 + \log(-x)\} = \lim_{y\to 0^+} \{-2 + \log y\} = [-2 - \infty] = -\infty.$$

Quindi

$$g'_-(0) = -\infty.$$

Analogamente

$$\lim_{x\to 0^+} g'(x) = \lim_{x\to 0^+} \{4 + \log(x)\} = -\infty,$$

da cui

$$g'_+(0) = -\infty.$$

Pertanto, poiché

$$g'_-(0) = -\infty = g'_+(0),$$

ne segue che in $x = 0$ la funzione g non è derivabile e presenta un punto a tangente verticale.

Riepilogando

- se $\alpha \neq 1$, g non è continua, quindi neanche derivabile, in $x = 0$. In particolare, g presenta in $x = 0$ una discontinuità eliminabile;
- se $\alpha = 1$, g è continua in $x = 0$ ma non è derivabile e presenta un punto a tangente verticale.

5) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0, \\ \alpha x + \beta & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

Si discutano, al variare di α e β, la continuità e la derivabilità di f.

Svolgimento.

Cominciamo con l'osservare che, fuori da $x = 0$, la funzione è continua e derivabile.
Si tratta ora di studiare la continuità e la derivabilità in $x = 0$.

Per quanto riguarda la continuità, sappiamo che f risulta continua in $x = 0$ se e solo se si ha

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

Anzitutto

$$f(0) = \alpha \cdot 0 + \beta = \beta$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (\alpha x + \beta) = \beta.$$

Calcoliamo ora il limite destro di f in 0, vale a dire

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \cdot \exp\left(-\frac{1}{x}\right),$$

cioè il limite del prodotto di due funzioni.
Calcoliamo il limite di ciascun fattore per poi applicare, se possibile, l'algebra dei limiti.

Risulta banalmente

$$\lim_{x \to 0^+} x = 0^+.$$

Consideriamo il limite del secondo fattore,

$$\lim_{x \to 0^+} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Se poniamo $y = -\dfrac{1}{x}$, abbiamo che

$$y \to -\infty \quad \text{per } x \to 0^+.$$

Pertanto, dal teorema di sostituzione, si trova

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0^+.$$

Tornando al limite originario, troviamo, applicando il teorema del limite del prodotto di due funzioni,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x \cdot \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} x \cdot \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0^+ \cdot 0^+ = 0^+.$$

Pertanto f risulta continua in $x = 0$ se e solo se

$$\beta = 0.$$

Nel caso in cui $\beta \neq 0$, f presenta in $x = 0$ un punto di salto con salto

$$S = |\beta - 0| = |\beta|.$$

In tal caso f non può essere ovviamente derivabile in $x = 0$ (in quanto non continua).

Per studiare l'eventuale derivabilità in $x = 0$, riscriviamo f continua, il che significa riscrivere f sostituendo a β il valore 0:

$$f(x) = \begin{cases} x \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0, \\ \alpha x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

Per studiare la derivabilità di f in $x = 0$ calcoliamo, con le solite regole di derivazione, la derivata della funzione f (con l'intento di voler poi applicare il teorema del limite della derivata).
Cominciamo da

$$\alpha x.$$

Ovviamente si ha

$$(\alpha x)' = \alpha.$$

Consideriamo ora

$$x \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}.$$

Osservato che la derivata di $-\dfrac{1}{x} = -x^{-1}$ è

$$(-x^{-1})' = \; - \cdot (-1)x^{-2} = \frac{1}{x^2},$$

risulta

$$\left(x \cdot e^{-\frac{1}{x}}\right)' = 1 \cdot e^{-\frac{1}{x}} + x \cdot e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} =$$

$$= e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(1 + \frac{x}{x^2}\right) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Pertanto la derivata di f è

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ \alpha & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Ricordiamo che f è derivabile in $x = 0$ se e solo se

$$f'_{-}(0) = f'_{+}(0) \neq \infty.$$

Calcoliamo limite sinistro e destro della derivata.

Risulta

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \alpha = \alpha.$$

Quanto al limite destro della derivata, si deve calcolare il

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

vale a dire il limite di un prodotto di funzioni.
Consideriamo il limite di ciascun fattore. Si ha facilmente

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y \to -\infty} e^{y} = 0^+.$$

Per il secondo fattore si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + \infty = +\infty.$$

Poiché il primo fattore tende a 0 e il secondo a $+\infty$ non possiamo applicare direttamente l'algebra dei limiti (si è infatti creata la forma indeterminata $[0 \cdot \infty]$).
Per stabilire il valore del limite possiamo applicare il teorema di de l'Hopital, dopo aver riscritto il prodotto in forma adegauata al teorema (ricordiamo che le forme indeterminate adatte all'applicazione del teorema di De L'Hopital sono $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ e $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$).

Possiamo scrivere

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}}.$$

Poiché

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to +\infty} e^{y} = +\infty,$$

il limite precedente si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, come richiesto dalle ipotesi del teorema di de l'Hopital. Osserviamo che sono verificate anche le altre ipotesi per poter applicare il teorema.

Possiamo quindi applicare il teorema di De L'Hopital per risolvere il limite

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}}.$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} =$$

$$= \lim_{y+\infty} \frac{1}{e^y} = 0^+,$$

in quanto $\lim\limits_{y\to+\infty} e^y = +\infty$.
Pertanto si ha

$$f'_-(0) = \alpha, \qquad f'_+(0) = 0.$$

Ne segue che f è derivabile in $x = 0$ se e solo se

$$\alpha = 0.$$

Se invece $\alpha \neq 0$, il punto $x = 0$ è un punto angoloso per f.

6) Si studi la derivabilità in $x = 0$ della funzione definita per $x \in \mathbb{R}$ da

$$f(x) = \begin{cases} (\sin x)^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Svolgimento.

Studiamo la derivabilità di f in 0 utilizzando la definizione (cioè il limite del rapporto incrementale): pertanto, non è necessario controllare se la funzione è continua o meno in $x = 0$ (tale verifica è necessaria quando si vuole applicare il teorema del limite della derivata).
Ricordiamo che f è derivabile in $x = 0$ se e solo se

$$f'_-(0) := \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} =: f'_+(0)$$

e il valore comune di tali limiti è finito.
Cominciamo a calcolare la derivata sinistra.
Osserviamo che

$$f(x) = (\sin x)^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad f(0) = 0.$$

Si ha quindi

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(\sin x)^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(\sin x)^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}.$$

Calcoliamo quindi il limite

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{(\sin x)^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}.$$

Poiché $x \to 0$, risulta

$$\sin x \quad \sim \quad x,$$

da cui

$$(\sin x)^2 \quad \sim \quad (x)^2.$$

Si ottiene quindi,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0^-} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

ovvero il limite del prodotto di due fattori. Il primo fattore è infinitesimo, infatti $x \to 0^-$.
Quanto al secondo fattore, posto $y = \dfrac{1}{x} \to -\infty$ per $x \to 0^-$, osserviamo che non esiste il

$$\lim_{x\to 0^-} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to -\infty} \sin y.$$

Tuttavia la funzione $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ è limitata tra -1 e 1.
Dal corollario al secondo teorema del confronto segue che

$$\lim_{x\to 0^-} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

trattandosi del limite del prodotto di una funzione infinitesima e di una limitata per $x \to 0$.

Quindi

$$f'_-(0) = 0.$$

In maniera analoga si trova immediatamente che

$$f'_+(0) = 0.$$

Pertanto la funzione f è derivabile in $x = 0$ (quindi è anche continua in tale punto) e $f'(0) = 0$.

6) **[T.E. 10/01/2013]**

Studiare la derivabilità della funzione

$$g(x) = \begin{cases} 2\sin\sqrt[3]{x} + \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 7\log\left(1 + e^{1/x}\right) & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Svolgimento.

Per studiare la derivabilità di g in $x = 0$ dobbiamo controllare se derivata sinistra e destra esistono finite e coincidono.
Procediamo direttamente col loro calcolo per mezzo del rapporto incrementale:

$$f'_+(0) := \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin\sqrt[3]{x} + \frac{1-\cos x}{x} - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin\sqrt[3]{x}}{x} + \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Utilizzando gli infinitesimi equivalenti dedotti dai limiti notevoli si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^{1/3}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x^{2/3}} = +\infty.$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin\sqrt[3]{x}}{x} + \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = +\infty + \frac{1}{2} = +\infty.$$

Ciò è sufficiente per poter dire che la funzione non è derivabile in $x = 0$. Tuttavia, poiché dobbiamo classificare il tipo di non derivabilità, dobbiamo calcolare anche la derivata sinistra in $x = 0$, vale a dire

$$f'_-(0) := \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Dobbiamo studiare il limite

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{7 \log\left(1 + e^{1/x}\right)}{x}.$$

Poiché, posto $y = \dfrac{1}{x} \to -\infty$ per $x \to 0^-$, risulta

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0,$$

si ha che $\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right) \to 1$ quando $x \to 0^-$, da cui

$$\lim_{x \to 0^-} \log\left(1 + e^{1/x}\right) = \log(1) = 0.$$

Il fattore $\log\left(1 + e^{1/x}\right)$ è quindi infinitesimo per $x \to 0^-$.
Per prima cosa osserviamo che tale fattore è della forma

$$\log(1 + t) \quad \text{con} \quad t \to 0:$$

infatti, come osservato poco fa, $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$.
Pertanto si ha

$$\log\left(1 + e^{1/x}\right) \quad \sim \quad e^{1/x} \quad \text{per } x \to 0^-,$$

come caso particolare di

$$\log(1 + t) \quad \sim \quad t \quad \text{per } t \to 0.$$

Ne segue che

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{7 \cdot \log\left(1 + e^{1/x}\right)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{7 \cdot e^{1/x}}{x} =$$

$$\lim_{x \to 0^-} 7 \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{1/x}.$$

Per calcolare il precedente limite ricorreremo alla formula di de l'Hopital, dopo aver posto $y = \dfrac{1}{x} \to -\infty$ per $x \to 0^-$. Si trova

$$\lim_{x \to 0^-} 7 \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{1/x} = \lim_{y \to -\infty} 7 \cdot y \cdot e^y = \lim_{y \to -\infty} 7 \cdot \frac{y}{e^{-y}},$$

che si presenta proprio nella forma indeterminata $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ in quanto $-y \to +\infty$ quando $y \to -\infty$. Risulta quindi, per il Teorema di de L'Hopital,

$$\lim_{y\to-\infty} \frac{7\cdot y}{e^{-y}} \overset{H}{=} \lim_{y\to-\infty} \frac{7}{-e^{-y}} = 0,$$

dato che

$$\lim_{y\to-\infty} e^{-y} = \lim_{t\to+\infty} e^{t} = +\infty.$$

Abbiamo quindi provato che

$$f'_-(0) = 0.$$

In definita, essendo

$$f'_-(0) = 0, \qquad f'_+(0) = +\infty,$$

segue che $x = 0$ è un punto angoloso per f.